COMPORTAMIENTO ESTRATÉGICO

MANEL ANTELO SUÁREZ

Departamento de Fundamentos da Análise Económica
Universidade de Santiago de Compostela

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Registro bibliográfico (ISBD)
ANTELO SUÁREZ, MANEL
Comportamiento estratégico / Manel Antelo Suárez. – Barcelona : Reverté, 2019.
XXIII, 332 p. : il. ; 24 cm.
Bibliog.: p. 325-328. Índices.
DL B 28811-2018. - ISBN 978-84-291-2807-9
1. Economía. 2. Empresas. 3. Teoría de juegos. I. Antelo Suárez, Manel, aut. II. Título.
33
658

Esta edición:

ISBN: 978-84-291-2807-9

Propiedad de:
Editorial Reverté, S.A.
Calle Loreto 13-15, local B
08029 Barcelona
Tel: (+34) 93 419 3336
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Impreso en España · *Printed in Spain*

Depósito Legal: B 28811-2018
Impresión: ServicePoint

1474

A Sarah.
Por la magia que desprende

Índice de contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

Prólogo

En este libro se examinan los aspectos básicos de los juegos no cooperativos y la forma en que se utilizan en algunas de sus aplicaciones paradigmáticas en el ámbito de la economía. Un juego no cooperativo no es más que un modelo matemático que permite estudiar el comportamiento de dos o más agentes racionales (llamados jugadores)[1] cuando se ven involucrados en cualquier relación en la que concurren dos características: por una parte, el objetivo de cada jugador colisiona total o parcialmente con los del resto de jugadores y, por otra, las ganancias de cada jugador no dependen solamente de su propia actuación, sino también del comportamiento de los demás jugadores.[2] Con esta manera de formular —y de analizar— las relaciones entre jugadores que suponemos que son racionales se intenta desentrañar la forma óptima de actuar de cada jugador en una situación de conflicto en la que cada uno atiende a sus propios intereses y, en el caso menos simplificado, trata de comportarse estratégicamente mintiendo o, al menos, ocultando su información cuando revelarla es perjudicial para sus objetivos.

La teoría de juegos tal como se muestra a lo largo de este libro empezó a forjarse a principios de la década de 1950. Nada más emerger, se enfocó casi exclusivamente al estudio de asuntos militares. Incluso pudo haber contribuido de manera significativa a salvar a la humanidad de un posible apocalipsis nuclear durante la Guerra Fría, al poner de manifiesto que la carrera armamentística entre los EE. UU. y la extinta URSS era un juego no cooperativo y, además, de suma negativa, por cuanto ambos países —y, por extensión, todos los del mundo— acababan perdiendo. Luego, pasados los veinte primeros años en los que el objetivo primordial fue el análisis de situaciones de confrontación bélica, las aplicaciones de la teoría de juegos no cooperativos traspasaron este umbral y se extendieron a otros ámbitos tan diversos como la biología, la política, la psicología, la diplomacia, los interrogatorios policiales, los convenios colectivos e incluso la educación. Sin embargo, el mayor y más fructífero campo de aplicación de la teoría de juegos no cooperativos fue —y continúa siendo— el de los negocios y las empresas y, en general, el de la ciencia económica.

[1] Los jugadores pueden ser individuos que juegan una partida de póker, empresas que compiten en un determinado mercado, gobiernos que estudian modificar o no los aranceles a la importación de productos de otros países, ejércitos que analizan sus estrategias militares, sindicatos que barajan qué demandas salariales plantear a las organizaciones empresariales, etc.

[2] Asimismo, que los jugadores no puedan establecer acuerdos vinculantes entre sí, aunque este aspecto ya está implícito en la propia definición de juego no cooperativo.

Que la economía sea la ciencia en la que la teoría de juegos no cooperativos ha encontrado más y mejor acomodo tiene su razón de ser si tenemos en cuenta que cuando hablamos de economía nos referimos a dos asuntos básicos. En primer lugar, a la asignación de recursos (económicos) que son relativamente escasos, en el sentido de que la gente siempre desea tener más cantidad de ellos de la que existe y puede conseguir. En segundo lugar, y derivado de la escasez relativa, es evidente que, dada la dotación de cualquier recurso, si un agente consigue una cantidad mayor del mismo lo hace en detrimento de algún otro, que consigue una cantidad menor, y, por ende, surge la competencia por ese recurso. Pues bien, si economía y conflicto tienen puntos concomitantes y si, además, el conflicto delimita el contexto típico que define un juego no cooperativo, se puede colegir que la relación entre economía y teoría de juegos no cooperativos es poco menos que idiosincrática. Todavía más. Desde siempre, los economistas han admitido como razonable el supuesto de que los agentes económicos representativos (consumidores, empresas, sindicatos, reguladores…) actúan de manera racional a la hora de tomar sus decisiones óptimas.[3] Y, feliz coincidencia, una de las hipótesis básicas de la teoría de juegos es también la racionalidad que se le supone a los jugadores. Ergo, la economía puede catalogarse como hermana preferente de la teoría de juegos.

La masiva aplicación de la teoría de juegos no cooperativos al ámbito de la economía ha producido avances tan fructíferos en dicho campo que el premio Nobel Jean Tirole no duda en afirmar que "la teoría de juegos (y la de la información) han revolucionado nuestra comprensión de las instituciones económicas en las últimas cuatro décadas" (Tirole, 2017, p. 21). En efecto, antes de disponer de las herramientas de la teoría de juegos, los economistas pudieron explicar, de manera razonablemente satisfactoria, el proceso de asignación de recursos en mercados como el monopolio y la competencia perfecta. Y fueron capaces de hacerlo sin recurrir a esta teoría porque, en realidad, no la necesitaban: en el caso del monopolio porque solo hay un actor que toma decisiones; en el caso de las industrias competitivas, porque hay tantas empresas que el comportamiento de cada una de ellas tiene un impacto irrelevante en el agregado y, por ende, no afecta a los resultados obtenidos por cualquiera de las empresas, tanto las rivales como ella misma.

Sin embargo, las cosas eran diferentes cuando se trataba de comprender el proceso de asignación de recursos en mercados e instituciones con pocos agentes y en los cuales el resultado final de cada agente depende no solo de su comportamiento, sino también de cómo actúan todos y cada uno de los demás (interacción estratégica). Estos procesos de asignación permanecieron sin una explicación convincente y rigurosa durante mucho tiempo, hasta que apareció la moderna teoría de juegos no cooperativos. Durante ese tiempo, la economía se tuvo que resignar a estudiar el comportamiento de los agentes económicos considerados aisladamente para luego

[3] A pesar de las dudas que puede generar la asunción del supuesto de racionalidad en economía, es plausible que cuando se trata de recursos económicos, la gente sea más racional que, por ejemplo, cuando lo que está sobre la mesa son ideas, ya sean estas políticas o de otro tipo.

agregarlos. Y ello a pesar de que este procedimiento analítico solo es adecuado en contextos en los que hay agentes atomísticos que se comportan paramétricamente; no en contextos en los que el número de jugadores es tal que su comportamiento es, por definición, estratégico. Es por ello que los economistas no fueron capaces de explicar adecuadamente los problemas de la competencia imperfecta hasta que no dispusieron de las herramientas apropiadas para hacerlo: las desarrolladas por la teoría de juegos.

La propia definición de la ciencia económica ilustra la importancia que tiene para ella la teoría de juegos, especialmente para los temas relacionados con la competencia imperfecta. De hecho, antes del desarrollo de la teoría de juegos, la economía se describía, en general, como la ciencia que se encargaba de analizar (en contextos muy particulares, eso sí) la asignación de recursos escasos que pueden dedicarse a múltiples usos. Sin embargo, tras la incorporación del instrumental de la teoría de juegos, la economía se ha diversificado y ha visto ampliado su ámbito de tal forma que puede ser (re)definida como la ciencia que estudia los incentivos en cualquier institución social que imaginemos (Myerson, 1999). Tal es la huella de la teoría de juegos en la economía; no en vano permite explicar de manera rigurosa toda una pléyade de asuntos relevantes mediante un sistema de incentivos, compromisos y amenazas creíbles, que inducen comportamientos honestos de los agentes a la hora de revelar información privada (sobre las preferencias que tienen, la tecnología que utilizan, la capacidad de pago que poseen, los niveles de emisiones que provocan, la habilidad o productividad, la honestidad en el desarrollo de una tarea, etc.) a terceras partes. Tal es el caso, por ejemplo, del análisis de la provisión de bienes de carácter público, el funcionamiento de los mercados de competencia imperfecta, la asignación de un determinado objeto mediante un procedimiento de subasta, la teoría de contratos, las relaciones laborales o las externalidades en el consumo y/o la producción. Pero la lista de cuestiones en las que tiene aplicación es, sin duda, mucho mayor; casi infinita.

Pues bien, el objetivo de este libro es presentar, de forma clara y rigurosa, los aspectos básicos de la teoría de juegos no cooperativos en ambientes informacionales diversos y examinar cómo dichos aspectos estratégicos se trasladan a contextos típicamente económicos. Dicho de otra forma, cómo el arsenal de instrumentos aportados por la teoría de juegos no cooperativos nos puede ayudar a entender qué podría pasar cuando los actores económicos interactúan estratégicamente como sucede en los oligopolios, por ejemplo. La decisión de acotar el ámbito de estudio a los juegos no cooperativos es pareja a la de proporcionar las herramientas que permiten analizar de la mejor forma posible el conflicto. Y la primacía del enfoque de los juegos no cooperativos sobre los cooperativos para investigar esta temática queda fuera de toda duda. Con todo, y lejos de pretender analizar la extensa temática de la teoría de juegos no cooperativos o de ensamblar la vasta literatura existente en este campo, he intentado aplicar mi mejor criterio para decidir qué asuntos enfatizar, cuáles mencionar sucintamente y cuáles omitir. Ni que decir tiene que, como en todo juicio de valor, la decisión adoptada no está exenta de subjetividad y, por ende, queda sometida a la opinión del lector.

Por último, un objetivo que me he marcado en la elaboración del libro ha sido el de hacer el máximo esfuerzo para que la exposición resultase clara y accesible al alumnado de cualquier asignatura relacionada con alguno de los asuntos tratados, o con todos ellos a la vez. La importancia de estos asuntos merece que su tratamiento sea expuesto con la mayor nitidez posible. Y, asimismo, con la mayor dosis posible de amenidad para que la experiencia del lector resulte lo más placentera y estimulante que se pueda. Si he conseguido rozar alguno de estos objetivos, o los dos, el esfuerzo habrá valido la pena.

Estructura del libro

Los nueve capítulos que configuran el libro se desarrollan de la siguiente forma. El Capítulo 1 constituye una primera incursión en el ámbito de la teoría de juegos no cooperativos. A lo largo del mismo, se plantean los conceptos básicos y se ofrece un abanico de ejemplos que ilustran situaciones en la que el conflicto está presente de una forma u otra y, por tanto, son equiparables a juegos no cooperativos. El Capítulo 2 se dedica a analizar los juegos no cooperativos en los que los jugadores intervinientes toman sus decisiones de forma simultánea (juegos estáticos) o secuencial (juegos dinámicos). En el primer caso, ningún jugador sabe, en el momento que tiene que jugar, qué ha jugado el o los jugadores rivales; en el segundo, al menos un jugador conoce, antes de tomar su decisión, qué han jugado el resto de jugadores. En estos juegos, además, la información sobre la estructura del juego que tienen todos y cada uno de los jugadores es completa. En el Capítulo 3, los resultados fundamentales obtenidos en el Capítulo 2 se aplican a contextos de índole económica. Así, se examinan situaciones económicas (y de otra índole) susceptibles de ser abordadas con la estructura y los conceptos de equilibrio de los juegos estáticos y dinámicos de información completa analizados en el capítulo anterior. En el Capítulo 4 se examinan los aspectos básicos de los juegos no cooperativos en los que los jugadores juegan simultáneamente y al menos uno de ellos desconoce la función de pagos de algún otro y, por tanto, la información sobre el juego deja de ser completa. Estos juegos se conocen como juegos bayesianos estáticos (o juegos simultáneos con información incompleta), porque en su resolución intervienen no solo las estrategias de los jugadores, sino también el sistema de creencias de los jugadores (no informados), y en la actualización o revisión de las creencias juega un papel esencial la regla de actualización de Bayes. El Capítulo 5 se dedica al análisis de situaciones económicas equiparables a juegos bayesianos estáticos. El análisis de las subastas selladas, la competencia en cantidades o en precios cuando (al menos) una empresa posee información privada sobre algún aspecto de su función de beneficios, o la provisión de un bien público cuando cada individuo desconoce la disposición a pagar de los demás son algunas de las temáticas analizadas en el marco de los juegos bayesianos estáticos. En los Capítulos 6 y 7 se analizan, respectivamente, los aspectos fundamentales de los juegos bayesianos dinámicos y algunas de las situaciones de índole económica que son más representativas de la estructura de estos juegos y, por tanto, que se pueden analizar a la luz de dichos juegos. El Capítulo 8 se dedica a analizar una clase especial de juegos no cooperativos dinámicos con información completa, como son los juegos repetidos a lo largo de un número finito o infinito de veces, es decir, los juegos que surgen a partir de un juego estático (o juego de etapa) que los mismos jugadores juegan de forma repetida una y otra vez a lo largo del tiempo. Por último, el Capítulo 9 revisa algunas de las aplicaciones económicas más paradigmáticas de los juegos repetidos finitos e infinitos, y con él concluye el libro.

Agradecimientos

Este libro es fruto de mi interés por los asuntos, tanto de índole económica como no económica, que giran alrededor del comportamiento estratégico de los agentes que intervienen en ellos y por las situaciones que requieren la utilización del arsenal conceptual y analítico suministrado por la teoría de juegos no cooperativos para su estudio riguroso. Debo dar las gracias a muchas personas que, directa o indirectamente, me han ayudado a elaborarlo y han ejercido en mí una influencia positiva. En particular, doy las gracias a Julio Bueno, de Editorial Reverté, por la favorable disposición con la que acogió el proyecto desde sus comienzos. Su generosa colaboración en las últimas fases del proceso ha sido de gran ayuda para la finalización del mismo. También tengo que agradecer a mi colega, Rafael Trelles, de la Universidade de Santiago de Compostela, la lectura crítica que ha realizado de algunos capítulos y a Mercè Aicart, que con dedicación y envidiable profesionalidad ha dado forma a un manuscrito no siempre comprensible y que, sin su ayuda, nunca hubiese adquirido aspecto de libro.

Una advertencia final

A lo largo del libro se utiliza el término *jugador* en masculino, a pesar de que en muchas ocasiones se hace referencia a agentes de género femenino (madres, empresas, etc.) y que, por tanto, en puridad deberían ser catalogadas como *jugadoras.* Quiero advertir a las personas que usen este libro que mi intención ha sido la de utilizar jugador como genérico y practicar así la economía del lenguaje. En consecuencia, cuando se habla de *jugador* nos referimos tanto a un agente de género masculino como a uno de género femenino.

M. A.
Santiago de Compostela, Noviembre de 2018

Un primer contacto con los juegos no cooperativos 1

1.1. Introducción

Desde siempre, el conflicto ha sido un aspecto central en la historia de la humanidad y, en general, de los seres vivos cuando compiten unos con otros por los recursos escasos. Surge de manera espontánea cuando dos o más individuos, involucrados en cualquier situación interactiva, tienen diferentes objetivos y, para alcanzarlos, pueden elegir libremente entre diversas opciones disponibles y que dan lugar a resultados diferentes. Pongamos un ejemplo. El beneficio que puede obtener un determinado banco cuando decide fijar la remuneración del ahorro de sus clientes depende no solo de su decisión (aumentar, dejar intacta o reducir dicha remuneración), sino también de las decisiones que en ese sentido adopten los bancos contrincantes. Como consecuencia, algo que el banco debe tener en cuenta antes de decidir cuánto remunerar el ahorro de sus clientes es evaluar las posibles acciones y reacciones del resto de bancos que interaccionan con él en el mercado y que influyen en sus resultados. La decisión puede resultar más o menos beneficiosa para sus intereses, dependiendo de las decisiones que adopten los demás bancos.

Lo anterior quiere decir que el banco en cuestión está involucrado en un juego con otros bancos y que el impacto de sus decisiones en sus beneficios depende de las decisiones tomadas por todos ellos. Un juego es simplemente la formalización de un problema de este tipo, es decir, un problema que atañe a dos o más agentes decisores (que, de ahora en adelante, llamaremos jugadores), en el que cada uno se esfuerza por comportarse pensando en obtener el mejor pago posible, y donde cada uno:

- se enfrenta a una elección de entre al menos dos opciones de comportamiento posibles,
- es consciente de que su ganancia depende no solo de la opción que él adopte, sino también de las que adopten los demás (interdependencia estratégica), y
- tiene intereses que son total o parcialmente contrapuestos con los de los demás jugadores (conflicto de intereses).

Los jugadores puede ser individuos (como sucede en una partida de naipes o de ajedrez), empresas (como en el caso de los bancos que estamos mencionando), partidos políticos (como cuando compiten por los votos del electorado), países (como en las alianzas estratégicas, las guerras comerciales o la carrera de armamentos), Hacienda y los contribuyentes (como cuando se trata de los impuestos a pagar), licitantes en la subasta de un determinado objeto, o cualesquiera otros agentes que se vean inmersos en cualquier situación de conflicto. En todos estos casos y muchos otros el aspecto básico es que el comportamiento de los jugadores involucrados tiende a ser proactivo y estratégico y, por tanto, son situaciones que pueden ser catalogadas propiamente como juegos. Precisamente, el nombre de *teoría de juegos* proviene de que en muchas de las situaciones que comúnmente tildamos de juegos cada jugador tiene que decidir qué hacer sabiendo que dicha elección será buena o mala para sus intereses, según lo que hagan los demás. Se trata, pues, de tomar decisiones óptimas en situaciones de conflicto y cooperación. Más detalladamente, la teoría de juegos[1] ofrece un arsenal analítico para:

a) Comprender los fenómenos económicos y sociales en los que el resultado para cada participante depende de las acciones y reacciones de todos los agentes involucrados (conflicto).
b) Aportar conceptos de solución que sirvan para predecir el comportamiento estable que cabe esperar de cada uno de los jugadores (equilibrio).
c) Elaborar marcos o reglas de interacción en los que las estrategias de los jugadores conduzcan a los resultados deseados (diseño de mecanismos).

En la Tabla 1.1 se recogen los diversos métodos con los que se puede analizar la toma de decisiones, en función del número de agentes involucrados (jugadores) y el número de objetivos de cada jugador.

Tabla 1.1. Métodos para tomar decisiones. *Fuente:* Bilbao (2000)

Jugadores \ Objetivos	Uno	Dos o más
Uno	Investigación operativa	Decisión multicriterio
Dos o más	Juegos cooperativos	Juegos no cooperativos

En este libro centraremos la atención en el análisis de situaciones en las que participan dos o más jugadores y en las que cada uno de ellos tiene un objetivo que colisiona, total o parcialmente, con los objetivos de los demás jugadores. Para describir correctamente una situación estratégica o de conflicto, es decir, un juego, es necesario especificar los siguientes elementos:

- Los jugadores que participan en el juego.
- Las reglas del juego, esto es, las acciones que están a disposición de cada jugador y el orden en que son tomadas.
- La información que cada jugador tiene en cada momento en que le toca jugar o adoptar su decisión.

[1] También se podría llamar *análisis matemático de conflictos* o *toma interactiva de decisiones.*

Juegos estáticos y dinámicos con información completa 2

2.1. Introducción

Cualquier situación de conflicto en la que las partes involucradas (jugadores) tomen decisiones interdependientes y no puedan firmar acuerdos vinculantes entre sí (contratos) se puede interpretar como un juego no cooperativo. Esta interdependencia obliga a cada jugador a considerar, en el momento de adoptar su estrategia, las posibles decisiones del resto de jugadores porque el pago que finalmente obtenga dependerá de las estrategias de todos los jugadores. Dicho de otra forma, cada jugador necesita ponerse en el lugar de cada uno de los demás jugadores y visualizar su estrategia óptima. Estas situaciones estratégicas son muy frecuentes en cualquier ámbito que imaginemos: en el plano económico (empresas que compiten en una determinada industria, por ejemplo), el social (miembros de un tribunal de justicia que votan sobre una determinada medida que afectará a toda la sociedad), el político (partidos que, a la hora de elaborar su programa, tienen en cuenta las propuestas de otros partidos que compiten por el mismo espacio electoral), en las relaciones personales (conducta de los miembros de una pareja), etc. Su análisis es, por tanto, de una relevancia extraordinaria y la trascendencia de la teoría de juegos no cooperativos radica en que aporta el marco conceptual adecuado para llevar a cabo dicho análisis, así como las herramientas apropiadas para ayudar en la comprensión de estos problemas y de las situaciones de conflicto en general.

Este capítulo se dedica a analizar los juegos no cooperativos, tanto estáticos como dinámicos, cuando la información que poseen los jugadores es completa, es decir, cuando la estructura del juego (el conjunto de jugadores que participan en él, las reglas del juego y las preferencias o pagos de cada jugador) es *conocimiento común*. Esto significa que todos los jugadores conocen dicha estructura, todos saben que todos la conocen, todos saben que todos saben que todos la conocen... y así hasta el infinito. En particular, se examina la forma de representar analíticamente dichos juegos, así como los conceptos de solución que se han propuesto como descripción del previsible desarrollo de los mismos y del comportamiento óptimo de los jugadores involucrados en tales juegos.

A continuación, en la Sección 2.2 se describe la notación y la terminología que utilizaremos a lo largo del libro. La Sección 2.3 analiza cómo representar una situación estratégica y la 2.4 muestra los conceptos de solución para juegos no cooperativos en los que la información que poseen los jugadores es completa. Por último, la Sección 2.5 examina los problemas que puede presentar el equilibrio de Nash como solución de un juego no cooperativo de información completa y la forma de solventarlos.

2.2. Notación y terminología

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación, a menos que expresamente se diga otra cosa.

El conjunto de jugadores participantes en un juego se denotará con el conjunto finito $\mathcal{N} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$, siendo i el jugador i-ésimo. Si la *Naturaleza* también interviene en el juego, denotaremos a este "pseudojugador" como jugador 0 y, en consecuencia, el conjunto de jugadores será $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, i, \dots, n\}$.

El espacio de acciones disponibles para un determinado jugador i es el conjunto $\mathcal{A}_i$, siendo $a_i \in \mathcal{A}_i$ una opción concreta que puede adoptar. Por $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ denotaremos una combinación o perfil de acciones de todos los jugadores y por $\boldsymbol{a}_{-i} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ una combinación de acciones de todos los jugadores excepto el jugador i. Por lo tanto, $\boldsymbol{a} = (a_i, \boldsymbol{a}_{-i})$.

El espacio de estrategias a disposición del jugador i es el conjunto $\mathcal{S}_i$, siendo $s_i \in \mathcal{S}_i$ una estrategia concreta. Una estrategia s_i es un plan de juego completo para el jugador i que especifica todas las acciones que toma en cada contingencia del juego en la que le pudiese tocar jugar, desde que empieza a jugar hasta que acaba. Al igual que sucede con las acciones, $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ será una estrategia colectiva de todos los jugadores y $\boldsymbol{s}_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ un perfil de estrategias de todos los jugadores excepto el jugador i. Por lo tanto, $\boldsymbol{s} = (s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$.

El pago (utilidad o beneficio) para cada jugador i se denotará como $u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$.

Para clarificar la diferencia entre acción y estrategia, consideremos el siguiente juego. Dos jugadores, cada uno con la mano derecha cerrada, tienen que decidir si mostrar al rival un dedo extendido o mostrar dos. El jugador 1 muestra su elección al jugador 2 y, a continuación, este decide si enseñar un dedo o dos. Los pagos son tales que si la cantidad total de dedos es par, el jugador 2 le paga un euro al jugador 1; si es impar, se quedan como están. En este caso, las acciones para ambos jugadores son las especificadas por el conjunto $\mathcal{A}_i = \{1, 2\}$, $i = 1, 2$, donde 1 significa que el jugador decide mostrar un dedo y 2 significa que muestra dos. Una estrategia para el jugador 1 es una acción, con lo cual $\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_1 = \{1, 2\}$. Sin embargo, una estrategia para el jugador 2 ya no es una simple acción como en el caso del jugador 1, sino que es una acción para cada posible contingencia del juego, es decir, un plan que determina una acción si el jugador 1 muestra un dedo y otra acción distinta si 1 muestra dos dedos. Por tanto, $\mathcal{S}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, donde el primer componente de cada vector indica la acción del jugador 2 para el caso en que el jugador 1 muestre un dedo y el segundo la acción de 2 para el caso en que el jugador 1 muestre dos dedos.[1] En definitiva, $\mathcal{S}_2 \neq \mathcal{A}_2$.

La diferencia entre acción y estrategia es importante. Si 1 cree que a 2 no le importa el dinero sino quedar bien con él, pensará que la estrategia que va a seguir 2 es (1, 2) para que así 1 gane siempre. Entonces, a 1 le daría lo mismo mostrar que

[1] Por ejemplo, la estrategia (1,1) significa que el jugador 2 elige mostrar un dedo si el jugador 1 ha elegido mostrar un dedo y decide mostrar un dedo si el jugador 1 ha decidido mostrar dos dedos.

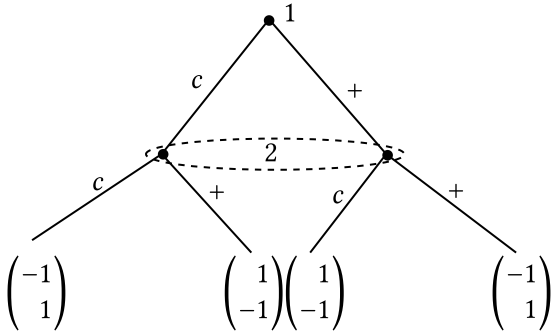

Figura 2.1. Forma extensiva del juego *de emparejar monedas*

El conjunto de información del jugador 1, que recoge la información que este jugador posee cuando le toca elegir, está formado por un solo nodo. Por otra parte, el óvalo que rodea los dos nodos del jugador 2 denota que este jugador comparte la misma (falta de) información en ambos nodos: cuando elige no sabe qué estrategia ha elegido el jugador 1. *Emparejar monedas* es un juego que se juega una sola vez (*one-shot game*) y, como tal, es un juego de información imperfecta. Las estrategias de cada jugador i son las dadas por el conjunto $\mathcal{S}_i = \{c, +\}$, es decir, coinciden con las acciones disponibles para el jugador, $\mathcal{S}_i = \mathcal{A}_i = \{c, +\}$.[8] Por último, los pagos (siendo los del jugador 1 los representados en la parte superior de cada vector columna y los del jugador 2 los representados en la parte inferior) se muestran en los vectores de la parte inferior del árbol.

En el juego de *emparejar monedas* las estrategias que utilizan los jugadores (c o $+$) son estrategias puras, ya que son elegidas con certeza. También podrían mezclar las estrategias puras y decidir, por ejemplo, jugar c con probabilidad p, $0 < p < 1$, y $+$ con probabilidad $1 - p$. Dicha mezcla

$$(\text{elegir } c \text{ con probabilidad } p, \text{ elegir } + \text{ con probabilidad } 1 - p)$$

es lo que se conoce como *estrategia mixta*. En este caso, a cada combinación de estrategias no se le puede asociar un nodo terminal, como ocurre con las estrategias puras, sino una distribución de probabilidad sobre el conjunto de nodos terminales, con lo cual el pago de cada jugador vendrá dado en términos esperados.

Si *emparejar monedas* se jugase de manera dinámica o secuencial (haciendo, por ejemplo, que eligiese primero el jugador 1 y mostrase su elección al jugador 2 y, a continuación, eligiese este jugador), entonces tendríamos un juego con la forma extensiva dada en la Figura 2.2.[9]

---

[8] Además de la forma extensiva de la Figura 2.1, existe otra forma extensiva, dada por un diagrama de árbol donde en lo más alto está situado el jugador 2, luego el jugador 1 y, en los vectores de pagos, se cambia el orden de los componentes para que el primer elemento denote el pago del jugador que está en lo más alto del árbol y el segundo denote el pago del que está situado más abajo.

[9] Un juego, por cierto, bastante más aburrido que el desarrollado de forma simultánea. A pesar de todo, lo describimos para mostrar la diferencia entre ambos.

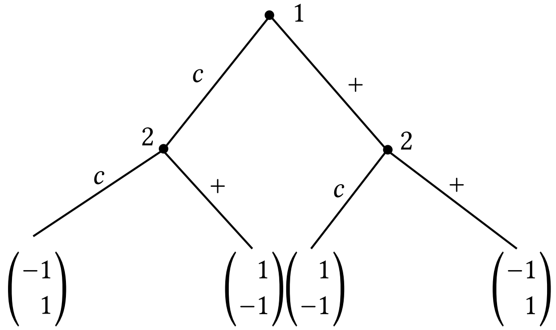

Figura 2.2. Forma extensiva del juego de *emparejar monedas* cuando el jugador 2 elige una vez que ha observado la elección del jugador 1

En este caso, el jugador 1, que elige primero, tiene $\mathcal{A}_1 = \{c, +\}$ como conjunto de acciones y, dado que sigue teniendo un conjunto de información con un solo nodo, igual que sucedía en el juego simultáneo, su espacio de estrategias vuelve a ser $\mathcal{S}_1 = \{c, +\}$. Sin embargo, el jugador 2, que elige sabiendo qué decisión ha tomado el 1, no tiene la misma información que cuando el juego se desarrollaba de manera simultánea. Ahora, en cada nodo en el que le toca jugar tiene una información diferente, con lo cual tiene dos conjuntos de información, cada uno de ellos con un solo nodo. En definitiva, el juego pasa a tener información perfecta. Esto se refleja en que si bien las acciones del jugador 2 son las del conjunto $\mathcal{A}_2 = \{c, +\}$, sus estrategias posibles son cuatro: "elegir c si 1 ha elegido c y elegir c si 1 ha elegido +", "elegir c si 1 ha elegido c y elegir + si 1 ha elegido +", "elegir + si 1 ha elegido c y elegir c si 1 ha elegido +", "elegir + si 1 ha elegido c y elegir + si 1 ha elegido +". Formalmente, $\mathcal{S}_2 = \{cc, c+, +c, ++\}$.

Este ejemplo muestra claramente la diferencia entre acción y estrategia. Una acción es una decisión que puede tomar un jugador en un momento determinado en el que le toque jugar, mientras que una estrategia es una descripción del curso de acción completo que puede seguir un jugador cada vez que le toca jugar, desde que empieza su participación en el juego hasta que acaba. Es evidente que el jugador 1 tiene dos acciones a su disposición y, asimismo, dos estrategias posibles. Sin embargo, el jugador 2 tiene dos acciones a su disposición y cuatro estrategias posibles.

Un ejemplo de juego dinámico con información completa y perfecta es el juego del *ciempiés* que describimos a continuación.

Ciempiés. Al jugador 1 se le da una chocolatina. Puede quedarse con ella (y el jugador 2 quedará sin nada) y parar el juego o dejar que continúe. Si deja que continúe, se le quita la chocolatina al jugador 1 y se le dan dos chocolatinas al jugador 2. El jugador 2 puede quedarse con las dos chocolatinas y parar el juego o dejar que siga. Si permite que siga, se le quita una chocolatina y se le dan cuatro al jugador 1. El jugador 1 puede parar el juego y quedarse con las cuatro chocolatinas (y el jugador

2 con una) o dejar que el juego siga, en cuyo caso cada jugador obtiene tres chocolatinas y el juego finaliza. La representación extensiva de este juego dinámico es la que aparece en la Figura 2.3.

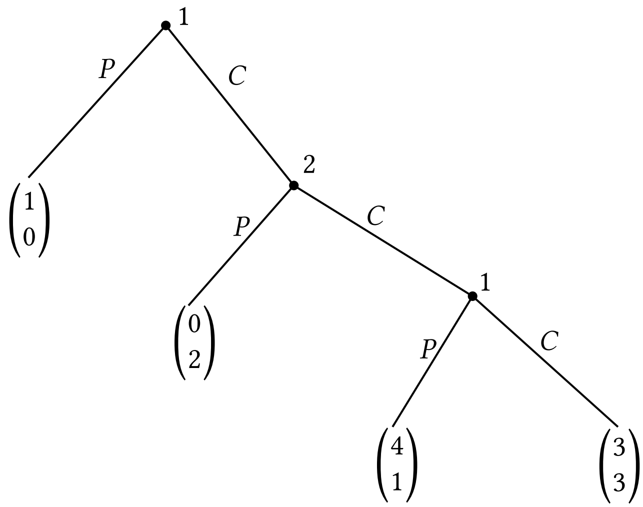

Figura 2.3. Forma extensiva del *ciempiés*

Si denotamos por P la acción consistente en parar el juego y por C la de dejar que continúe, es evidente que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{P, C\}$, mientras que $\mathcal{S}_1 = \{PP, PC, CP, CC\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{P, C\}$.

La forma extensiva describe con gran detalle la secuencia de movimientos de los jugadores y su efecto en los pagos. Sin embargo, deja de ser práctica cuando tenemos juegos cuya estructura es compleja. Es entonces cuando la forma normal, aun siendo un resumen incompleto de la información facilitada por la forma extensiva, se torna especialmente útil.

2.3.2. Representación en forma normal o estratégica (para juegos estáticos)

La forma normal de representar un juego es un resumen compacto e incompleto de la información que ofrece la forma extensiva. De hecho, al pasar de la forma extensiva a la normal se pierde información acerca de la estructura de movimientos de los jugadores (quién juega antes y quién juega después) y de los conjuntos de información de cada jugador. A pesar de todo, es una forma apropiada de representar los juegos estáticos, en los que los jugadores eligen una sola vez y lo hacen de manera simultánea. La razón es que en este caso ningún jugador tiene información sobre las decisiones de los demás cuando le toca mover y, por tanto, es suficiente con reflejar sus estrategias (un movimiento por cada jugador). Es por ello que, aunque es posible representar cualquier juego ya sea en forma normal o en forma extensiva, la forma normal suele ser más adecuada para juegos simultáneos o estáticos y la extensiva para juegos secuenciales o dinámicos.

Tabla 2.31. Juego en forma normal

1 \ 2	r	l
R	2, 2	2, 2
L	3, 1	0, 0

Los dos equilibrios de Nash de este juego son: (R, l) y (L, r). ¿Cuál debemos desechar por no cumplir el criterio de la perfección en los subjuegos? Utilicemos para ello la forma extensiva del juego, representada en la Figura 2.15.

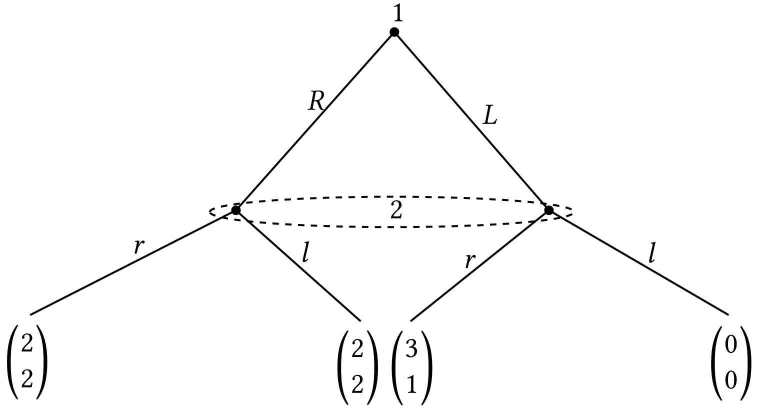

Figura 2.15. Juego en el que la perfección en subjuegos no surte efecto

Es fácil ver que los dos equilibrios de Nash son también ENPS, porque el único subjuego que existe es el juego en su totalidad (no hay subjuegos propios). El criterio de la perfección en los subjuegos no permite refinar, pues, los equilibrios de Nash, porque es válido solo para los juegos dinámicos; no para los estáticos. El refinamiento del equilibrio perfecto en forma normal (Selten, 1975) sí permitiría eliminar el equilibrio (R, l) en la forma normal del juego y quedarnos con el equilibrio (L, r) como único equilibrio perfecto de la mano temblorosa.[34]

No solo los juegos estáticos —ya sean de información completa o incompleta— son juegos de información imperfecta. Los juegos dinámicos de información incompleta también son juegos de información imperfecta, una vez que se les aplica la llamada *transformación* de Harsanyi (véase Harsanyi, 1967/68). La transforma-

[34] Existe cierta confusión terminológica provocada por el propio Selten. En el artículo de 1965, llamó “equilibrio perfecto” a lo que después se conoció como equilibrio perfecto en subjuegos. Más tarde, en un artículo de 1975, analizó un juego donde este “equilibrio perfecto” no era tan perfecto como se presumía, y rectificó diciendo que tal vez se había precipitado llamándole equilibrio perfecto a algo que no era tan perfecto. Fue entonces cuando a equilibrio perfecto le añadió la coletilla de “en subjuegos”, reservando el nombre de equilibrio perfecto (de mano temblorosa) para juegos en forma normal. Lo correcto es llamar ENPS al concepto aplicado a juegos en forma extensiva y equilibrio perfecto de la mano temblorosa al utilizado para juegos en forma normal.

ción de Harsanyi consiste en incorporar al juego la *Naturaleza* como un jugador más y cuyo papel es "elegir" o "asignar" aleatoriamente el *tipo* para cada jugador, el cual es solamente conocido por el propio jugador y por nadie más. Con este artificio, un juego de información incompleta pasa a ser un juego de información completa, pero imperfecta y, por tanto, la perfección en subjuegos en juegos de información incompleta puede ser improductiva.

El criterio de la perfección en subjuegos también puede ser inoperante en aquellos juegos en los que el único subjuego que hay es el juego en su totalidad. Para verlo, consideremos el juego de la Figura 2.16.

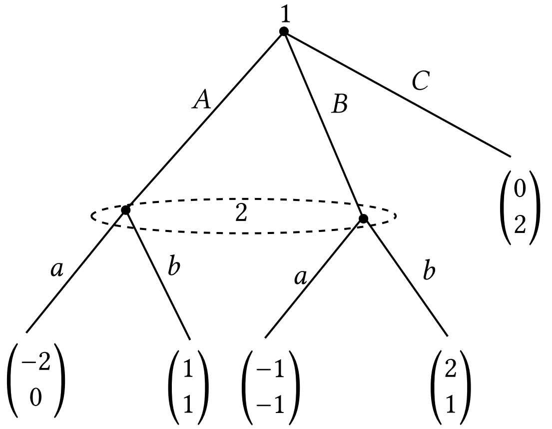

Figura 2.16. Forma extensiva del juego

Ningún conjunto de información de este juego, excepto el conjunto de información inicial, está formado por un solo nodo. Por lo tanto, el juego no tiene ningún subjuego propio (subjuegos distintos del juego en su totalidad y que se definan a partir de un conjunto de información con un solo nodo) y, en consecuencia, el criterio de perfección en cada subjuego es equivalente al del equilibrio de Nash. En definitiva, los dos equilibrios de Nash del juego, (C, a) y (B, b), también son ENPS.

Sin embargo, el ENPS (C, a) no parece razonable. Suponer que el jugador 2 puede llegar a elegir a es inconsistente con su racionalidad, a pesar de que es incapaz de discriminar entre los dos nodos de su conjunto de información: para cualquiera (A o B) que haya sido la acción del jugador 1 que ha permitido mover a 2, a es uniformemente mejor para el jugador 2. Dicho de otra forma, cualquiera que sea la percepción que tenga el jugador 2 sobre la acción del jugador 1 que le posibilita mover, a le rinde un pago esperado estrictamente menor que b. Por lo tanto, si 1 asume que 2 es racional, entonces el equilibrio sostenido por la acción (contingente) a no es creíble. La acción a es una amenaza no creíble si fuera anunciada por 2 para inducir a 1 a elegir C. Pues bien, para juegos como este —y, en general, para los juegos de información imperfecta— es para lo que se ha propuesto el criterio de refinamiento del equilibrio secuencial.

El argumento adoptado por el refinamiento *secuencial* para eliminar las estrategias subóptimas a partir de conjuntos de información que no definen propiamente un subjuego consiste en especificar explícitamente en cada uno de estos conjuntos de información (estén o no estén en la senda de equilibrio) percepciones que sean consistentes con el hipotético equilibrio. Por tanto, un equilibrio secuencial requiere la especificación no solo de las estrategias de cada jugador (acciones contingentes en cada uno de sus conjuntos de información), sino también las percepciones de cada jugador en cada uno de sus conjuntos de información cuando estos no están compuestos por un solo nodo. Para que una especificación tal sea un equilibrio secuencial, se requiere que:

a) Para cada jugador, y en cada uno de sus conjuntos de información, las acciones prescritas por sus estrategias sean óptimas, dadas sus percepciones y las estrategias de los demás.

b) Las percepciones de cada jugador en cada uno de sus conjuntos de información sean actualizaciones de probabilidad consistentes con las estrategias de equilibrio y la regla de Bayes.

Como sabemos, un equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos si es un equilibrio en todos los subjuegos del juego, los cuales son partes del juego que empiezan en un conjunto de información con un solo nodo. Dadas las limitaciones de este concepto de equilibrio en juegos de información imperfecta (en los que es posible que no haya subjuegos por el hecho de que los conjuntos de información de algún jugador tienen más de un nodo), el refinamiento del equilibrio de Nash o, lo que es lo mismo, del ENPS es el equilibrio secuencial.

Para definir un equilibrio secuencial necesitamos definir qué se entiende por apreciación (*assessment*) del juego.

Definición 2.22. *Una apreciación de un juego es un par $(\mathbf{s}, \mu)$, donde $\mathbf{s}$ es un perfil de estrategias (o estrategia colectiva) y μ es un conjunto de percepciones de los jugadores.*

Definición 2.23. *Para cada jugador i y para cada conjunto de información $\mathcal{V}_i$, un conjunto de percepciones es una atribución de probabilidades $\mu(x)$ a todo nodo $x \in \mathcal{V}_i$.*

Estas probabilidades representan las percepciones subjetivas del jugador i si a lo largo del juego se alcanzase el conjunto de información en cuestión. En principio, μ es arbitrario. Sin embargo, en la senda de equilibrio exigiremos que la apreciación $(\mathbf{s}, \mu)$ sea consistente con el juego y las leyes estadísticas, es decir, que siempre que sea posible μ sea inducido por $\mathbf{s}$ a través de la regla de Bayes.[35] Además, para que una apreciación consistente sea un equilibrio ha de incorporar acciones óptimas por parte de cada jugador.

[35] La regla de Bayes se define, formalmente, en el Capítulo 4 y los que le siguen.

Definición 2.24. *Un equilibrio secuencial es una apreciación consistente* $(\mathbf{s}, \mu)$ *en la que para cada jugador i y en cada uno de sus conjuntos de información,* $\mathcal{V}_i$*, se verifica* $E_i\left[\mathbf{s}|\mu, \mathcal{V}_i\right] \geq E\left[(s_i', \mathbf{s}_{-i})|\mu, \mathcal{V}_i\right]$*, para todo* $s_i' \in \mathcal{S}_i$*.*

En el juego representado en la Figura 2.16, y cualesquiera que sean las percepciones que se asignen fuera de la senda de equilibrio correspondientes al perfil de estrategias (C, a), esto es, en el conjunto de información del jugador 2, es evidente que la acción a no es óptima frente a b para el jugador 2. Así pues, el perfil de estrategias (C, a) no es un equilibrio secuencial, quedando (B, b) como único equilibrio secuencial del juego. En este caso, y dado que el conjunto de información del jugador 2 pertenece a la senda de equilibrio del juego, las percepciones del jugador 2 en dicho conjunto de información ya no son arbitrarias, sino que toda la probabilidad ha de estar concentrada (probabilidad igual a uno) en que resulta la acción de equilibrio B por parte del jugador 1. En el Capítulo 6 volveremos a retomar el equilibro secuencial en el contexto de los juegos bayesianos dinámicos.

Los juegos de información completa en acción 3

3.1. Introducción

Las primeras aplicaciones de la teoría de juegos no cooperativos en el campo de la economía tuvieron lugar en el ámbito de la competencia imperfecta, es decir, el abanico de estructuras de mercado situadas entre la competencia pura, donde el tamaño de cada empresa es tal que el impacto de su comportamiento en el resultado de mercado es negligible, y el monopolio, donde la existencia de una sola empresa elimina la posibilidad de cualquier comportamiento estratégico con otras empresas.[1] Tanto es así que estas aplicaciones fueron iniciadas por Augustin Cournot en 1838, ni más ni menos que ciento doce años antes de que, en 1950, John F. Nash propusiese su archiconocido concepto de equilibrio de Nash como solución razonable para las situaciones de conflicto equiparables a juegos no cooperativos. Después de Cournot, muchos otros autores como Joseph Bertrand, Heinrich von Stackelberg o Harold Hotelling han ido utilizando —incluso sin saberlo— la teoría de juegos no cooperativos para desarrollar y resolver modelos de competencia estratégica. Y la historia continúa.

En este capítulo se presentan algunas de las aplicaciones más relevantes que encuentra la teoría de juegos no cooperativos en condiciones de información completa. En particular, la Sección 3.2 analiza situaciones de mercado modelables como juegos estáticos o simultáneos de información completa. En la Sección 3.3 se presta atención a situaciones más allá de las de mercado *strictu sensu* y representables también como juegos que se desarrollan de forma simultánea. Por último, la Sección 3.4 examina situaciones modelables como juegos dinámicos o secuenciales. En todos los casos se resuelven los juegos resultantes y se examinan las propiedades de los correspondientes equilibrios.

Empezamos analizando, en la Sección 3.2, situaciones susceptibles de ser formalizadas como juegos estáticos de información completa. Nos referimos, entre otras, a la competencia entre las empresas oligopólicas de un mercado cuando interactúan una sola vez y compiten en cantidades o en precios, al comportamiento de las empresas cuando los bienes que producen son heterogéneos a los ojos de los consumidores, así como al comportamiento cuando tienen que decidir dónde ubicarse y, por tanto, la competencia se basa en la localización.

---

[1] No así con los consumidores a la hora de decidir segmentar el mercado, la calidad a ofrecer del producto, el menú de contratos (cantidad servida, precio estipulado) que se diseña para cada consumidor en condiciones de información asimétrica, etc.

3.2. Juegos estáticos

3.2.1. Competencia Cournot

En 1838, el matemático y economista francés Antoine Augustin Cournot publicó "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richeses" (véase Cournot, 1838). En esta obra aparece formalizada la primera teoría del oligopolio, así como la solución resultante, la cual se reveló —con más de un siglo de anticipación— como el resultado de buscar un equilibrio de Nash en un juego de información completa en el que la estrategia de cada empresa consistía en decidir la cantidad que debía producir. Las hipótesis del modelo más clásico de oligopolio son las siguientes:

H1. Se considera un mercado en el que operan n empresas iguales, $i = 1, \ldots, n$, que producen un bien homogéneo a los ojos de los consumidores.[2]

H2. Los consumidores son pasivos y vienen descritos por una función inversa de demanda agregada $p(Q) : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$, donde p denota el precio y $Q = \sum_i q_i$ el output total, siendo q_i el output que produce cada empresa i. La función de demanda es (al menos) dos veces continuamente diferenciable y satisface $p(0) > 0$, $p(Q) \geq 0$, si $q > 0$, $p'(Q) < 0$ y $p''(Q) \geq 0$.

H3. Cada empresa i produce de acuerdo con la función de costes $C_i(q_i) : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$, la cual es (al menos) dos veces continuamente diferenciable y tal que $C_i(q_i) \geq 0$, para todo $q_i \geq 0$, $C_i'(q_i) > 0$ y $C_i''(q_i) \geq 0$.

H4. La función de beneficios (o pagos) de cada empresa i, $\pi_i(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n) = p(Q)q_i - C_i(q_i)$, es acotada y (al menos) dos veces continuamente diferenciable.[3]

H5. Las "reglas del juego" se resumen en la competencia *à la* Cournot: cada empresa elige, durante un único periodo de tiempo, y a la vez que las demás, la cantidad de *output* que debe producir para maximizar su beneficio, $q_i \in \operatorname{argmax} \pi_i(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n)$, suponiendo que las cantidades que eligen las demás empresas están dadas y no varían (*conjeturas de tipo Cournot*).

H6. Todos los elementos del juego (el número de empresas, el espacio de estrategias de cada empresa y la función de pagos de cada una) son *conocimiento común*: cualquier empresa conoce estos elementos y sabe que cualquier otra empresa los conoce y sabe que cualquier otra empresa sabe que ella los conoce..., y así hasta el infinito.

En términos formales, la situación definida por H1-H6 se puede traducir a un juego no cooperativo estático con información completa que podemos representar en forma normal.

---

[2] El número de empresas es mayor que uno y finito, $1 < n < \infty$.

[3] La interdependencia existente entre las empresas queda reflejada en el hecho de que el beneficio de cada una no solo depende de la cantidad que ella decida producir, sino también de las cantidades que produzcan las demás.

$$q_j\left(q_i\right) = -\frac{1}{b}\left(\frac{\overline{\pi}_i + cq_i}{q_i} - a\right) - q_i$$

y su pendiente en el mencionado plano es

$$\frac{\partial q_j\left(q_i\right)}{\partial q_i} = \frac{\overline{\pi}_i}{bq_i^2} - 1 \tag{3.4}$$

la cual puede ser positiva, negativa o nula. En particular, es cero (en cuyo caso tenemos un punto crítico de la curva isobeneficio) cuando $\overline{\pi}_i = bq_i^2$. Incorporando en esta condición la expresión de la función de beneficios dada en (3.3), se obtiene que la pendiente de la función isobeneficio es cero cuando $\left(a - bQ\right) q_i - cq_i = bq_i^2$ o, lo que es lo mismo, cuando

$$q_i\left(2bq_i + bq_j - a + c\right) = 0 \tag{3.5}$$

y dado que $q_i \neq 0$, necesariamente el término entre paréntesis de (3.5) ha de ser nulo. Ahora bien, $2bq_i + bq_j - a + c = 0$ no es más que la expresión implícita de la función de reacción de la empresa i, $R_i(q_j)$, con lo cual las curvas isobeneficio de i alcanzan el máximo en cada punto de $R_i(q_j)$.

b) Si derivamos la expresión (3.4) una vez más, resulta $\frac{\partial^2 q_j(q_i)}{\partial q_i^2} = -2\frac{\overline{\pi}_i}{bq_i^3}$, que es una expresión negativa para $\overline{\pi}_i > 0$ y $q_i > 0$.

c) Dado q_i, es evidente que $\frac{\partial q_j(\cdot)}{\partial \overline{\pi}_i} = -\frac{1}{bq_i} < 0$, con lo cual q_j y $\overline{\pi}_i$ evolucionan inversamente. ■

El resultado de la Proposición 3.1 se ilustra gráficamente en la Figura 3.2.

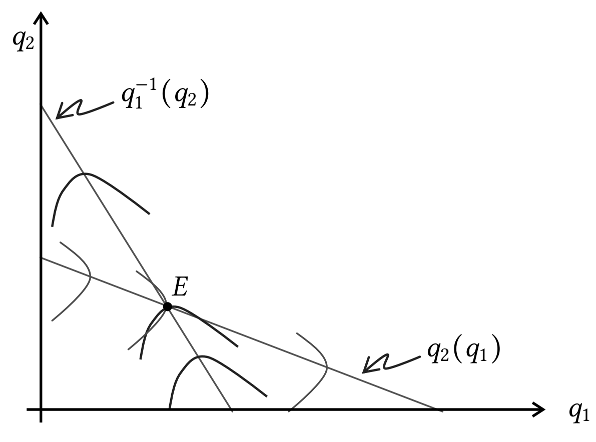

Figura 3.2. El mapa de curvas isobeneficio de cada duopolista

El equilibrio Cournot-Nash es el dado por el punto E de la Figura 3.2. Es fácil ver que la pendiente de la curva isobeneficio de i en dicho punto es cero, mientras que la de la curva isobeneficio de j es infinita. El equilibrio Cournot-Nash no es, pues, eficiente desde el punto de vista de la industria en su conjunto. Estamos ante un juego cuyo equilibrio es eficiente individualmente para cada empresa, pero no es eficiente colectivamente y, como tal, es un ejemplo de *dilema del prisionero.*

Volviendo a las funciones de reacción dadas en (3.1) y (3.2), el equilibrio de Nash de este juego (o equilibrio Cournot-Nash) es el par de cantidades que, de forma simultánea, una es la mejor respuesta a la otra. Por lo tanto, resolviendo las funciones de mejor respuesta (3.1) y (3.2), se obtiene el siguiente resultado, donde el superíndice C denota competencia *à la* Cournot.

Proposición 3.2a. *El único equilibrio de Nash del duopolio de Cournot es* $\left(q_1^C, q_2^C\right) = \left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$. *En dicho equilibrio, la cantidad total producida es* $Q^C = \frac{2(a-c)}{3b}$, *el precio de mercado es* $p^C = c + \frac{a-c}{3}$ *y el beneficio de cada empresa asciende a* $\pi_i^C = \frac{(a-c)^2}{9b}$, $i = 1, 2$.

Demostración Si ambas empresas acaban produciendo estas cantidades, ninguna de ellas tiene incentivo para desviarse de la cantidad elegida y producir una cantidad distinta, siempre y cuando la otra produzca la cantidad que prescribe el equilibrio. Por ejemplo, si cada empresa acordase con la otra producir la mitad de la cantidad de monopolio, $q_i = \frac{a-c}{4b}$, $i = 1, 2$, su beneficio ascendería a $\pi_i = \frac{(a-c)^2}{8b}$, que es mayor que el beneficio que obtiene en el equilibrio Cournot-Nash. Por lo tanto, sería posible una mejora paretiana con respecto al equilibrio Cournot-Nash. Sin embargo, que cada empresa produzca esta cantidad no puede ser equilibrio de Nash porque no verifica (3.1) y (3.2), es decir,

$$q_i\left(\frac{a-c}{4b}\right) \neq \frac{a-c}{4b}, \text{ para todo } i = 1, 2 \qquad \blacksquare$$

¿Qué sucede si en la industria operasen n empresas en lugar de solo dos? En este caso, el perfil de estrategias $\left(q_1^C, q_2^C, \ldots, q_n^C\right)$ sería un equilibrio de Cournot-Nash si, y solo si, verificase

$$\left.\begin{array}{rl} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} & = p\left(Q^C\right) + p'\left(Q^C\right) q_1^C - C_1'\left(q_1^C\right) = 0 \\ & \vdots \\ \dfrac{\partial \pi_n}{\partial q_n} & = p\left(Q^C\right) + p'\left(Q^C\right) q_n^C - C_n'\left(q_n^C\right) = 0 \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

de donde

$$q_i^C\left(\sum_{j\neq i} q_j^C\right) = \frac{a-c}{2b} - \frac{\sum\limits_{j\neq i} b q_j^C}{2b} \tag{3.7}$$

$$\min_{a,b} \int_0^a t\,(a-z)^2\,\mathrm{d}z + \int_a^{x=\frac{1-b+a}{2}} t\,(z-a)^2\,\mathrm{d}z + \int_{x=\frac{1-b+a}{2}}^{1-b} t\,((1-b)-z)^2\,\mathrm{d}z +$$

$$+\int_{1-b}^{1} t\,(z-(1-b))^2\,\mathrm{d}z$$

donde las dos primeras integrales representan a los consumidores que compran a la empresa A y las dos últimas a los que compran a la empresa B.

La expresión anterior se puede simplificar a

$$\min_{a,b} \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-b-a}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1-b-a}{2}\right)^3 + \frac{b^3}{3}$$

y resolviendo las correspondientes CPO se llega al resultado establecido. ■

El mensaje de las Proposiciones 3.29 y 3.30 es que desde el punto de vista social hay demasiada diferenciación del producto cuando el mercado es privado. Por lo tanto, la diferenciación de los productos a la que llegan las empresas cuando maximizan separadamente sus beneficios es ineficientemente elevada.

3.4.5. Negociación secuencial

Un ejemplo de juego dinámico con información completa y perfecta es el desarrollado por dos jugadores que tienen que decidir, mediante ofertas y contraofertas, cómo repartirse una unidad de un determinado recurso. El proceso de negociación dura tres periodos, $t = 1, 2, 3$. En $t = 1$, el jugador 1 hace una oferta en la que propone quedarse con la cantidad s_1 del recurso y que $1 - s_1$ sea para el jugador 2. El jugador 2 puede aceptar la oferta y el juego concluye (con el pago s_1 para el jugador 1 y el pago $1 - s_1$ para el jugador 2) o rechazarla, en cuyo caso el juego continúa. Si se sigue jugando, entonces en $t = 2$ el jugador 2 hace su oferta en la que propone darle la cantidad s_2 del recurso al jugador 1 y quedarse él con $1 - s_2$. Si el jugador 1 acepta esta propuesta, el juego termina (con s_2 y $1 - s_2$ como pagos para los jugadores 1 y 2, respectivamente), mientras que si la rechaza, el juego continúa. Si se sigue jugando, un agente externo dictamina, en $t = 3$, que el jugador 1 ha de aceptar la cantidad s del recurso, $0 < s < 1$, y el jugador 2, la cantidad $1 - s$. El juego concluye con los citados pagos. El factor de descuento temporal para ambos jugadores es δ, $0 < \delta < 1$.

Para resolver este juego (Stahl, 1972; Rubinstein, 1982), utilizamos un argumento de inducción hacia atrás, empezando por el subjuego que tiene lugar en $t = 2$, por ser este el último periodo en el que los jugadores pueden hacer propuestas de reparto. Una vez que el jugador 2 ha hecho su propuesta en $t = 2$, el jugador 1 ha de decidir entre aceptarla y obtener el pago s_2 o rechazarla y obtener s en $t = 3$. Es evidente que, situado en el periodo $t = 2$, aceptará la propuesta del jugador 2 si, y solo si, $s_2 \geq \delta s$. Por lo tanto, el jugador 2, para tomar su decisión en $t = 2$, ha de tener en cuenta que puede conseguir $1 - \delta s$ en $t = 2$ (ofreciendo $s_2 = \delta s$ al jugador 1 en $t = 2$) o $\delta(1 - s)$ en $t = 3$ (ofreciendo $s_2 < \delta s$ al jugador 1 en $t = 2$). Dado que $1 - \delta s > \delta(1 - s)$, la estrategia óptima para el jugador 2 en $t = 2$ es proponer

$$s_2^* = \delta s$$

y el jugador 1 la aceptará, con lo cual los pagos (en el reparto de equilibrio) serán $(\delta s, 1 - \delta s)$.

Una vez resuelto el periodo $t = 2$ vayamos a $t = 1$. En este periodo es el jugador 1 quien tiene que hacer una propuesta de reparto, que el jugador 2 aceptará si, y solo si, $1 - s_1 \geq \delta(1 - s_2^*)$ o, lo que es lo mismo, $s_1 \leq 1 - \delta(1 - s_2^*)$. Entonces el jugador 1, para hacer su propuesta en $t = 1$, tiene en cuenta que recibirá $1 - \delta\left(1 - s_2^*\right) = 1 - \delta\left(1 - \delta s\right)$ en dicho periodo si su oferta de reparto contempla la cantidad $\delta\left(1 - \delta s\right)$ para el jugador 2, o recibirá $\delta s_2^* = \delta^2 s$ en $t = 3$ si su oferta en $t = 1$ contempla una cantidad inferior a $\delta\left(1 - \delta s\right)$. Dado que $1 - \delta\left(1 - \delta s\right) > \delta^2 s$, la estrategia óptima para el jugador 1 en $t = 1$ es

$$s_1^* = 1 - \delta\left(1 - \delta s\right)$$

En definitiva, el ENPS del juego de negociación de Stahl-Rubinstein lleva a un acuerdo inmediato en $t = 1$ y es el dado en la siguiente proposición.

Proposición 3.31. *El juego de negociación se resuelve en $t = 1$ con los pagos $(s_1^*, 1 - s_1^*)$, siendo $s_1^* = 1 - \delta\left(1 - \delta s\right)$.*

¿Qué sucede si hay un número infinito de ofertas y contraofertas? Si el juego tiene un número infinito de rondas (juego infinito), se puede aplicar la lógica utilizada en el caso de horizonte finito. El subjuego del periodo $t = 3$, si se alcanza, es idéntico al subjuego de $t = 1$; el subjuego de $t = 4$, si llegamos a él, es el mismo que el de $t = 2$; etc.

Sea v_H el mayor pago que puede conseguir el jugador 1 en cualquier resultado de inducción hacia atrás del juego completo. Si utilizamos v_H como el pago del jugador 1 en $t = 3$, entonces el pago para el jugador 1 en $t = 1$ es $f(v_H)$, donde

$$f(v_H) = 1 - \delta + \delta^2 s$$

y, como v_H es también el mayor pago posible en el juego de $t = 1$, entonces $f(v_H) = v_H$ y el único valor de s que satisface la ecuación $f(s) = s$ es $s^* = \frac{1}{1+\delta}$.

Proposición 3.32. *Si el juego de negociación se desarrolla durante infinitos periodos de ofertas y contraofertas, el ENPS es que, en el periodo inicial, $t = 1$, el jugador 1 proponga el reparto $(s^*, 1 - s^*) = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$ al jugador 2 y este acepte la propuesta.*

3.4.6. Aranceles y competencia imperfecta

Consideremos dos países, $i = 1, 2$, en los que hay sendas empresas que producen un determinado bien para el mercado doméstico y para exportar al otro país. El gobierno de cada país i impone un arancel t_i por unidad de producto importado del otro país. Los consumidores de cada país generan la demanda del bien dada por la función $p(Q_i) = \text{máx}\{0, a - Q_i\}$, donde Q_i es la cantidad total de producto existente en el mercado de dicho país y a, $a > 0$, es el tamaño del mercado. La empresa del país i produce d_i unidades del producto para el mercado doméstico y e_i unidades para el mercado extranjero. Su coste de producción es $c_i(\cdot) = c(d_i + e_i)$, siendo $c > 0$. Además, tiene que pagar $t_j e_i$ al país j en concepto de aranceles para poder vender en este país la producción e_i destinada a la exportación. Finalmente, la cantidad de producción existente en el mercado de cada país es $Q_i = d_i + e_j$, $i, j = 1, 2; i \neq j$.

El juego entre las empresas y entre los gobiernos es dinámico y se desarrolla a lo largo de dos etapas, $t = 1, 2$. En la etapa $t = 1$, los dos gobiernos fijan, de forma simultánea, las tarifas arancelarias óptimas t_1 y t_2. En $t = 2$, las empresas observan las tarifas impuestas por los gobiernos y deciden, simultáneamente, las cantidades a producir para el mercado interior y exterior, es decir, (d_1, e_1) la empresa del país 1 y (d_2, e_2) la empresa del país 2. La función de pagos (beneficios) de cada empresa i es el ingreso que obtiene en el mercado doméstico y el mercado extranjero menos el coste de producción junto con el arancel que ha de pagar al país j para poder exportar al mercado de este país, es decir,

$$\pi_i(t_i, t_j, d_i, d_j, e_i, e_j) = (a - (d_i + e_j))\, d_i + (a - (e_i + d_j))\, e_i - c(d_i + e_i) - t_j e_i \quad (3.35)$$

A su vez, la función de pagos (bienestar agregado) del gobierno o planificador social de cada país i es la suma no ponderada del excedente del consumidor de su país, el beneficio de la empresa de su país y el ingreso que obtiene por aranceles, es decir,

$$W_i(t_i, t_j, d_i, d_j, e_i, e_j) = \frac{1}{2} Q_i^2 + \pi_i(t_i, t_j, d_i, d_j, e_i, e_j) + t_i e_j \quad (3.36)$$

Buscamos el ENPS de este juego dinámico con información completa. Para determinarlo, empezamos por la última etapa del mismo, una vez que los gobiernos han decidido t_1 y t_2 en la primera etapa. En $t = 2$, si las empresas compiten en cantidades, la estrategia colectiva $((d_1^*, e_1^*), (d_2^*, e_2^*))$ es un equilibrio de Nash si, y solo si, la estrategia de cada empresa i, (d_i, e_i), resuelve el problema

$$\underset{d_i \geq 0,\, e_i \geq 0}{\text{máx}}\ \pi_i\left(t_i, t_j, d_i, e_i, d_j^*, e_j^*\right) \quad (3.37)$$

donde la función de beneficios es la dada en (3.35). El problema (3.37) equivale a dos optimizaciones separables:

$$\max_{d_i \geq 0} \; d_i \left(a - \left(d_i + e_j^* \right) - c \right)$$

y

$$\max_{e_i \geq 0} \; d_i \left(a - \left(e_i + d_j^* \right) - c \right) - t_i e_j$$

Si suponemos que $e_j^* \leq a - c$ y $d_j^* \leq a - c - t_j$, llegamos a la función de mejor respuesta

$$d_i^* = \frac{1}{2} \left(a - e_j^* - c \right) \tag{3.38}$$

que indica que la empresa i, a la hora de decidir cuánto producir para su mercado doméstico, tiene en cuenta la decisión de la empresa j respecto a cuánto producir para exportar al mercado i, e_j^*. Por otra parte, la decisión óptima de la empresa i respecto a cuánto producir para exportar al mercado j dependerá de lo que crea que producirá la empresa j para su mercado doméstico, d_j^*, y del arancel t_j que tendrá que pagar para exportar a dicho mercado, de manera que

$$e_i^* = \frac{1}{2} \left(a - d_j^* - c - t_j \right) \tag{3.39}$$

Resolviendo (3.38) y (3.39), resulta

$$d_i^* = \frac{a - c - t_i}{3}$$

y

$$e_i^* = \frac{a - c - 2t_j}{3}, \quad i = 1, 2$$

como equilibrio de Nash de la segunda etapa del juego.

En $t = 1$, y teniendo en cuenta que en la estrategia óptima de cada empresa d_i^* es una función de t_i, $d_i^* \left(t_i \right)$, y e_i^* es una función de t_j, $e_i^* \left(t_j \right)$, la función de pagos del gobierno i dada en (3.36) se convierte en

$$W_i \left(t_i, t_j, d_1^* \left(t_1 \right), e_1^* \left(t_2 \right), d_2^* \left(t_2 \right), e_2^* \left(t_1 \right) \right) = W_i \left(t_i, t_j \right)$$

por lo que si $\left(t_1^*, t_2^* \right)$ es un equilibrio de Nash, entonces cada gobierno resuelve

$$\max_{t_i \geq 0} \; W_i \left(t_i, t_j^* \right)$$

y la solución es

$$t_i^* = \frac{a - c}{3}, \quad \text{para } i = 1, 2$$

que es una estrategia dominante para cada gobierno. Por último, sustituyendo en (3.38) y (3.39), resulta

$$d_i^* = \frac{4(a-c)}{9}$$

y

$$e_i^* = \frac{a-c}{9}, \quad i = 1, 2.$$

Proposición 3.33. *El único ENPS del juego arancelario es que el gobierno de cada país elija el arancel $t_i^* = \frac{a-c}{3}$ en $t = 1$ y, a continuación, las empresas de cada país elijan los niveles de producción $d_i^* = \frac{4(a-c)}{9}$ y $e_i^* = \frac{a-c}{9}$ en $t = 2$.*

La cantidad total de producto existente en cada mercado es $Q_i^* = \frac{5(a-c)}{9}$ y es fácil ver que es inferior a la que habría si los gobiernos cooperasen, entendiendo por cooperar que los gobiernos fijen aranceles nulos. En efecto, si los gobiernos cooperasen para alcanzar un equilibrio socialmente óptimo, resolverían el problema

$$\max_{t_1, t_2 \geq 0} W_1(t_1, t_2) + W_2(t_1, t_2)$$

y la solución sería la dada en la siguiente proposición, donde el superíndice O denota optimalidad social.

Proposición 3.34. *Si hubiese cooperación entre los gobiernos, se alcanzaría la solución globalmente óptima, consistente en que los gobiernos fijarían los aranceles $t_1^O = t_2^O = 0$ en $t = 1$ y las empresas producirían las cantidades $d_i^O = \frac{a-c}{3}$ y $e_i^O = \frac{a-c}{3}$, en $t = 2$.*

Es fácil ver que en la solución globalmente óptima no habría aranceles y la producción (y, por tanto, el consumo) en cada mercado sería $Q_i^O = \frac{2(a-c)}{3}$, mayor que la que existe en la solución no cooperativa, $Q_i^O > Q_i^*$. Por lo tanto, el nivel de bienestar que se alcanzaría sería mayor.

En definitiva, el juego que hemos descrito tiene una única solución no cooperativa, que consiste en una guerra de aranceles, y es ineficiente desde el punto de vista social. Como tal, es una situación que reproduce las condiciones del juego del *dilema del prisionero*, en el que la solución individualmente óptima para cada gobierno es, sin embargo, Pareto inferior a la que sería óptima desde el punto de vista colectivo. Dicho de otra forma, fijar un arancel positivo respecto a fijar uno nulo (o bien aumentar el arancel respecto a dejarlo en el nivel que actualmente tenga) no solo es una estrategia de Nash para cada gobierno, sino que es una estrategia dominante. Es por ello que los gobiernos se ven abocados con suma facilidad, una y otra vez, a episodios de guerras comerciales a pesar de que son conocedores de que tales comportamientos son nefastos para el comercio internacional y el bienestar del conjunto de las naciones. Y también de que, en la práctica, para reducir los aranceles, o eliminarlos del todo, se necesitan largos y costosos procesos de negociación sin los cuales no parece plausible alcanzar ningún tipo de compromiso multilateral de reducción de aranceles.

Juegos bayesianos estáticos

4

4.1. Introducción

Hasta ahora hemos asumido que todo en el juego —y, en particular, las funciones de pagos de todos los participantes en el juego— es conocimiento común. Sin embargo, este supuesto de información completa es cuestionable en la mayoría de las situaciones de conflicto estratégico. Por ejemplo, cuando se subasta un determinado objeto, es muy posible que cada postor conozca su propia valoración del objeto, pero no las de los otros postores. Cuando las empresas de una industria oligopólica compiten entre sí, es probable que cada una conozca cuál es su coste marginal de producción, pero no los costes de las competidoras. En la transacción de un vehículo de segunda mano, probablemente el comprador desconoce la calidad del mismo, en tanto que el propietario-vendedor la conoce con más precisión al haberlo usado durante un tiempo. Una empresa que contrata a un empleado para llevar a cabo una determinada tarea puede no conocer las habilidades del trabajador, mientras que este puede tener una idea mucho más aproximada de sus capacidades. En la negociación entre dos o más agentes es posible que cada parte desconozca el factor de descuento temporal de la otra parte... En fin, la casuística es mucho más amplia, si bien los ejemplos descritos ilustran a la perfección el fenómeno de que, en la inmensa mayoría de las situaciones, algunos jugadores carezcan de cierta información respecto a los otros jugadores como, por ejemplo, los pagos o las preferencias de estos últimos.

Cualquiera de los contextos mencionados se identifica con un juego de información incompleta —también llamado juego bayesiano— y que puede ser de carácter estático (juego bayesiano estático) o dinámico (juego bayesiano dinámico).[1] La modalidad más común de juegos bayesianos,[2] ya sean estáticos o dinámicos, surge cuando cada jugador conoce su función de pagos, pero no la de los demás. De hecho, información incompleta significa que al menos un jugador desconoce la verdadera función de pagos de algún otro jugador, la cual es información privada de este último. Por lo tanto, al menos un jugador tiene incertidumbre sobre la fun-

[1] También conocidos como juegos de información privada o información asimétrica.

[2] Se llaman así porque en ellos se supone que los jugadores utilizan información nueva para actualizar o revisar sus creencias previas, las cuales provienen, por ejemplo, de información pasada. Esta actualización es lo que se conoce como regla de Bayes, ya que fue planteada por primera vez por el reverendo inglés Thomas Bayes en 1763. La regla de Bayes vincula la probabilidad de un suceso A dado B con la probabilidad de B dado A. Por ejemplo, sabiendo la probabilidad de sufrir dolor de cabeza dado que uno tiene gripe, se podría saber (teniendo algún dato más), la probabilidad de estar con gripe dado que a uno le duele la cabeza.

ción de pagos de algún otro jugador. Esta incertidumbre afectará a la forma en que cada jugador analiza la situación y elige sus estrategias óptimas.[3]

En este capítulo, relajamos, pues, la hipótesis de información completa, considerando situaciones en las que al menos uno de los jugadores ignora la función de pagos de algún otro jugador, al ser dicha función de pagos información privada de este último. En otras palabras, consideramos juegos caracterizados por tener información incompleta.

Las herramientas para resolver los juegos de información completa no sirven para resolver —ni siquiera, representar— los juegos de información incompleta. No en vano, la teoría de juegos tardó en analizar de forma rigurosa los juegos bayesianos porque se pensaba que, para resolverlos, era necesario incorporar las creencias de cada jugador i sobre los pagos de los jugadores rivales, y las creencias de los jugadores rivales sobre los pagos del jugador i y sobre las creencias acerca de los pagos de los rivales, y las creencias de cada jugador i sobre las creencias que los demás jugadores tienen sobre sus creencias… y así hasta el infinito. Algo que se volvía tremendamente complejo y que impidió analizar en profundidad los juegos de información incompleta… hasta que un economista húngaro, John Harsanyi, en el año 1967, encontró un método ingenioso e intuitivo para resolver el problema y que se ha dado en llamar *transformación de Harsanyi.*

La aportación de Harsanyi (1967/68) consistió en transformar un juego de información incompleta o asimétrica en otro con información completa, aunque imperfecta introduciendo un movimiento de un jugador llamado *Naturaleza.* Para ello, llamó "tipo" de jugador i a la función objetivo que puede tener i; por ejemplo, si el jugador j cree que la función de pagos de i es $u_i(x;\theta) = (x-\theta)^2$, donde x denota la variable de control del jugador i y θ es un parámetro que define al jugador i —parámetro conocido por i pero no por j—, entonces decimos que i "es de tipo $\overline{\theta}$" si j cree que su función de pagos es $u_i(\cdot) = x - \overline{\theta}$, "es de tipo $\underline{\theta}$" si j cree que su función de pagos es $u_i(\cdot) = x - \underline{\theta}$, etc.

La forma de convertir un juego con información incompleta en otro con información completa e imperfecta es imaginar que la función de pagos de un jugador dado viene determinada por un jugador ficticio (la *Naturaleza*) mediante una variable aleatoria. Cada jugador tiene un conjunto de "tipos", siendo cada tipo una realización posible de la variable aleatoria que resume la información privada. Los tipos de todos los jugadores se determinan aleatoriamente al principio del juego (mediante la elección hecha por la *Naturaleza*), de acuerdo con una distribución de probabilidad que es de dominio público (creencias *a priori*). Cada jugador observa el tipo que la *Naturaleza* le ha asignado, pero no los que le ha asignado al resto de jugadores, con lo cual la información privada de un jugador surge porque observa —y los rivales no— una elección previa que la *Naturaleza* ha hecho sobre él. Así,

[3] Una segunda modalidad de información incompleta surge cuando algún jugador tiene dudas o incertidumbre acerca de la racionalidad de los jugadores rivales (preferencias) como sucede, por ejemplo, cuando un jugador se plantea si los demás tratan de maximizar su función de pagos o siguen una norma social. Una tercera modalidad puede darse cuando los jugadores tienen dudas sobre las reglas de juego.

madre y la demandante afirme que es la verdadera madre; por último, si las dos mujeres dicen ser la verdadera madre del bebé, ambas pagarán una multa. Pues bien, cuando añadimos pagos a estas reglas del juego, el mecanismo que hemos diseñado se convierte en un juego. En particular, si suponemos que el pago de tener un bebé es 3 para MV y 1 para MF, la cuantía de la multa (si ambos jugadores declaran ser la verdadera madre) es 2 para cada uno y, por último, el pago por no tener el bebé y no pagar la multa es 0, entonces el mecanismo descrito, y con los pagos mencionados, da lugar al juego en forma extensiva de la Figura 4.3.

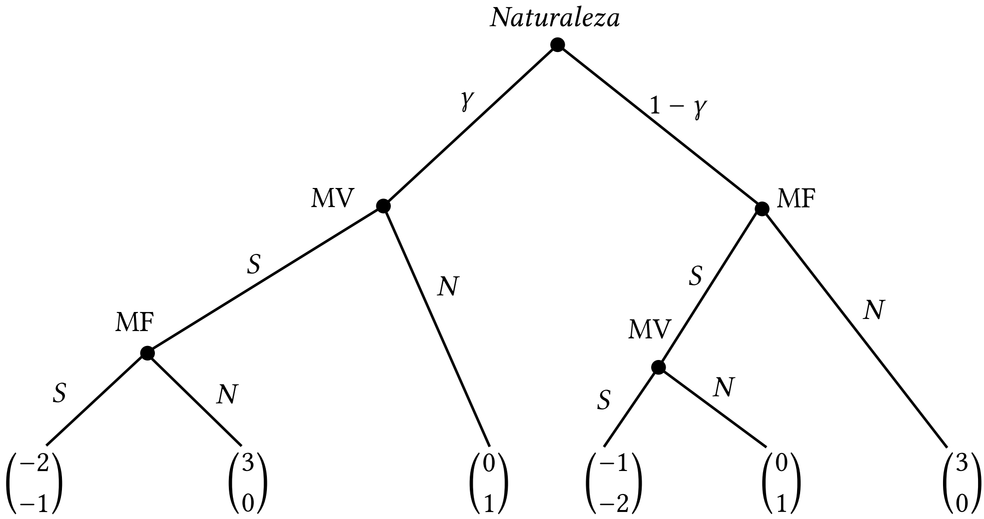

Figura 4.3. Forma extensiva del juego diseñado por el Rey Salomón

Por último, si resolvemos el juego por inducción hacia atrás, se llega al siguiente resultado.

Proposición 4.12. *El ENPS del juego inducido por el mecanismo prescribe que la verdadera madre del bebé declara ser la verdadera madre y la madre impostora niega ser la verdadera madre.*

Demostración En el juego en forma extensiva de la Figura 4.6 participan tres jugadores: la *Naturaleza*, MV y MF. Además, tanto MV como MF tienen dos acciones a su alcance, S y N, y dos conjuntos de información con un nodo cada uno. Por lo tanto, el conjunto de estrategias de cada uno de estos jugadores es $S_i = \{SS, SN, NS, NN\}$, $i =$ MV, MF. Cada estrategia hay que leerla de arriba abajo en el árbol del juego de la Figura 4.6. Por ejemplo, en el caso del jugador MV, la estrategia SS denota que este jugador elige S si la *Naturaleza* determina que, con su decisión aleatoria, el juego se desarrolle por el arco izquierdo y elige S si la Naturaleza determina que, con su decisión, vaya por el arco derecho y, además, MF juega S. (Lo mismo para las restantes estrategias del jugador MV.) De forma análoga, en el caso del jugador MF, la estrategia SS denota que este jugador elige S si la Naturaleza determina que, con su elección al azar, el juego transcurra por el arco derecho y elige S si la Naturaleza determina que, con su decisión, vaya por el arco de la izquierda y, además, MV juega S. (La interpretación del resto de estrategias de MF es similar.)

Por otra parte, el juego consta de cinco subjuegos: cuatro subjuegos propios distintos del juego en su totalidad y un quinto subjuego definido por el juego global. La parte del juego que empieza en el nodo inferior izquierdo en el que MF elige una vez que ha elegido MV tras la decisión de la Naturaleza de que el juego vaya por el arco izquierdo es un subjuego (subjuego 1). Asimismo, la porción del juego que empieza en el nodo en el que le toca jugar a MV por primera vez cuando la Naturaleza ha decidido que la mujer que tiene el bebé en su regazo es MV define otro subjuego (subjuego 2). La parte del juego que empieza en el nodo inferior derecho en el que MV elige una vez que ha jugado MF tras la decisión de la Naturaleza de que el juego vaya por el arco derecho configura otro subjuego (subjuego 3). La parte del juego que empieza en el nodo al que se llega cuando la Naturaleza ha determinado que la mujer con el bebé en su regazo es MF también es otro subjuego (subjuego 4). El quinto, y último, subjuego (subjuego 5) es el definido por el juego en su totalidad y que empieza en el nodo en el que la Naturaleza determina que la mujer que aparece con el bebé en sus brazos ante el Rey sea MV o MF. Como es sabido, un ENPS de este juego será una estrategia colectiva $(s^*_{\mathrm{MV}}, s^*_{\mathrm{MF}})$ que defina un EN en todas y cada una de estas partes del juego. Y, para determinarlo, utilizamos un argumento de inducción hacia atrás.

En el subjuego 1, la mejor respuesta de MF es elegir N. A continuación, y dada esta elección de MF, lo mejor que puede hacer MV cuando el desarrollo del juego ha desembocado en el nodo inicial del subjuego 2 (es decir, cuando la Naturaleza ha decidido que la mujer que tiene el bebé en su regazo es MV y, por tanto, que el juego ha llegado al nodo en el que MV tiene que elegir) es jugar S. Por otra parte, en el subjuego 3, la acción óptima para MV es N. Y, dada esta elección de MV, lo mejor que puede hacer MF en el subjuego 4 (es decir, cuando la Naturaleza ha determinado que la mujer que lleva en su regazo al bebé es MF y, por tanto, es MF la que tiene que jugar declarando si el bebé es realmente suyo o ella es una impostora) es elegir N. Por último, en el subjuego 5, en el que el nodo inicial del mismo corresponde al movimiento de la Naturaleza para determinar si la mujer que tiene el bebé en su regazo es la MV o la MF, es evidente que si MV es la que tiene el bebé en sus brazos, esta jugará S, mientras que si es MF la que tiene el bebé en su regazo, entonces esta jugará N.

En definitiva, el ENPS del juego representado en la Figura 4.6 es el perfil de estrategias $(s^*_{\mathrm{MV}}, s^*_{\mathrm{MF}}) = (SN, NN)$. Como se puede observar, este equilibrio prescribe que, independientemente de la elección hecha por la Naturaleza respecto a la verdadera o falsa maternidad de la mujer que se presenta ante el Rey con el bebé en su regazo, si esta mujer es la MV, esta jugará S, mientras que si es la MF, esta jugará N. ■

Es decir, el mecanismo que da lugar al juego de la Figura 4.6 permite implementar (mediante el ENPS) el resultado deseado por el Rey Salomón: que el bebé sea entregado a la verdadera madre.[19]

Los mecanismos son casos particulares de juegos de información incompleta caracterizados por un "principal" que le gustaría condicionar sus acciones a alguna información privada del otro jugador (o jugadores) llamado "agente". Consideremos un entorno caracterizado por un conjunto de jugadores, $i = 1, \dots, n$, un regulador que diseña un mecanismo para alcanzar un resultado deseado, un conjunto de posibles tipos para cada uno de los jugadores $\mathcal{T}_i$, una distribución de probabilidad sobre el conjunto de posibles tipos $\boldsymbol{p} \in \mathcal{T}$, un conjunto de posibles resultados $\mathcal{X}$ y una función de pagos para cada jugador $u_i : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \to \mathcal{R}$.

Definición 4.5. *Un mecanismo (forma de juego o esquema de incentivos) especifica:*

a) *El conjunto de jugadores.*
b) *El conjunto de posibles acciones o estrategias para cada jugador i, $\mathcal{A}_i$.*
c) *La función de resultados $f : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ que determina el resultado que corresponde a cada combinación de mensajes o estrategias de los jugadores.*

Es decir, un mecanismo debe indicar el conjunto de mensajes (o estrategias) de cada jugador y qué resultado produce cada combinación de mensajes o estrategias de los jugadores. Si, además, añadimos las preferencias de los jugadores sobre los resultados, entonces el mecanismo se transforma en un juego.

Definición 4.6. *Un mecanismo es directo si verifica $\mathcal{A}_i = \mathcal{T}_i$, para todo i.*

Es decir, un mecanismo es directo cuando la estrategia de cada jugador en el juego que induce el mecanismo es revelar honestamente su tipo (como un equilibrio de Nash). En un mecanismo directo a cada jugador se le pide que revele su tipo y, por tanto, un resultado $x = f(\boldsymbol{t}) \in \mathcal{X}$ se determina como una función del perfil de tipos $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n)$ declarados por los jugadores.

Supongamos, por otra parte, que un agente i es de tipo t_i y que su estrategia de equilibrio en el juego inducido por el mecanismo es $s_i(t_i)$. Sea $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ el vector de estrategias. Pues bien, el mecanismo es indirecto cuando el vector $\boldsymbol{t}$ determina los pagos de cada jugador a través de la estrategia $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ y es directo cuando determina los pagos directamente a partir del vector de tipos (véase la Figura 4.4).

---

[19] Si hubiésemos representado este juego extensivo como un juego simultáneo, el único equilibrio de Nash en estrategias puras sería aquel en el que MV siempre escoge S y MF escoge N. Por lo tanto, el mecanismo subyacente a ese juego simultáneo también permite implementar (mediante el concepto de solución del equilibrio de Nash en puras) el resultado deseado: entregar el bebé a la verdadera madre.

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{t} \arrow[dl] \arrow[dr, dashed] & \\ u_i(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})) & & \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

Figura 4.4. Un mecanismo indirecto (línea discontinua) y uno directo (línea continua)

Proposición 4.13 (Principio de revelación). *Sea $\boldsymbol{s}^*$ un EB del mecanismo indirecto. Entonces existe un mecanismo directo que es equivalente en pagos y tal que el perfil de estrategias dado por $s_i^*(t_i) = t_i$ para todo i y $t_i \in \mathcal{T}_i$ (revelación sincera) es un EB.*

La idea del principio de revelación es provocar que los jugadores se comporten honestamente, es decir, que ninguno tenga incentivos para mentir. Consideremos cualquier función $g : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ que especifique un resultado para todo perfil posible de tipos. Dicha función es implementable si hay algún mecanismo $\mathcal{G}$ que tenga un EB $\boldsymbol{s}^*$ tal que $g(\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{s}^*(\boldsymbol{t}))$. El principio de revelación indica que no es preciso considerar todos los mecanismos posibles cuando intentamos determinar el conjunto de funciones implementables; basta considerar aquellas funciones g que son compatibles en incentivos, es decir, que la revelación sincera es un EB en el correspondiente mecanismo directo.[20]

La característica particular de los mecanismos de revelación directa es que se diseñan en función de la información que el principal recibe de los agentes. Además, el principio de revelación implica que los mecanismos de revelación deben exhibir compatibilidad de incentivos, es decir, deben hacer que los agentes no estén tentados a comportarse de forma deshonesta con el principal (ocultando información o mintiendo) cuando se espera que ninguno lo haga. Lo más relevante de este principio es que el mecanismo diseñado por el principal para guiar la interacción de los agentes a resultados eficientes da lugar a equilibrios en el sentido estricto de la teoría de juegos.

[20] De acuerdo con el principio de revelación existen infinitos mecanismos mediante los cuales el diseñador o principal (que recibe la información privada que le dan los agentes y especifica sus acciones) puede especificar los incentivos para conducir la toma de decisiones de los agentes, pero solo uno de esos procedimientos da lugar a una asignación eficiente.

Aplicación de los juegos bayesianos estáticos 5

5.1. Introducción

En la mayoría de las situaciones de conflicto en las que los jugadores toman decisiones de manera simultánea, la información que rodea el juego correspondiente es incompleta. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando en un determinado momento las empresas de un mercado oligopolista compiten entre sí y cada una desconoce el nivel exacto de los costes de las empresas rivales y, por tanto, desconoce su función de pagos. O cuando se subasta un determinado objeto y cada licitante conoce el valor que le atribuye (disposición a pagar), pero no conoce el valor de ningún otro licitante. O cuando un laboratorio de investigación con una patente y cuyo valor económico desconoce tiene que licenciar la innovación patentada a una o varias empresas capaces de explotarla comercialmente y que, por su experiencia de mercado, conocen dicho valor. O cuando una administración pública saca a concurso la construcción de una autovía y desconoce el coste del proyecto, mientras que la potencial empresa o empresas constructoras tienen un conocimiento exacto del mismo. O, por citar un ejemplo más, cuando el vendedor conoce mejor que el comprador la calidad que tiene el producto que pone a la venta.

En cualquiera de los casos mencionados la información es incompleta, es decir, al menos uno de los jugadores participantes desconoce algún parámetro de la función de pagos de algún otro jugador. Se trata, pues, de situaciones en las que un jugador (informado) tiene diferentes tipos y el resto de los jugadores (desinformados) no saben el tipo exacto del jugador informado. En estos casos, como hemos visto, la transformación de Harsanyi —haciendo que el tipo concreto de jugador lo determine una elección previa hecha por la *Naturaleza*— convierte estos juegos de información incompleta (en los que el jugador o jugadores desinformados desconocen el tipo del jugador informado) en juegos de información completa, aunque imperfecta. Es por ello que los juegos bayesianos estáticos constituyen el modelo adecuado para analizar el desarrollo de cada una de estas situaciones y de otras similares. Así, uno de los aspectos a los que dedicaremos atención en este capítulo es a comparar los resultados que se obtienen en un contexto de información incompleta con los que se obtendrían si la información fuese completa. Esto nos permitirá evaluar el impacto que la información incompleta produce en el comportamiento de los jugadores.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 5.2 se analiza el funcionamiento del oligopolio de Cournot en condiciones de información incompleta, por el hecho de que alguna de las empresas desconocen los costes de las empresas rivales. Posteriormente, en la Sección 5.3 se extiende el análisis a la competencia mediante precios. En la Sección 5.4 examinamos las subastas en sobre cerrado con licitantes que tienen un continuo de tipos. La provisión de un bien público cuando la disposición a contribuir de cada individuo es información privada se analiza a la luz de los juegos bayesianos estáticos en la Sección 5.5. Por último, en la Sección 5.6 se estudia el mercado de coches de segunda mano en el que cada vendedor tiene información privada sobre la calidad de su coche y se muestra que esta asimetría informacional lleva a que el mercado sea inoperante como mecanismo eficiente de asignación de recursos.

5.2. Competencia *à la* Cournot

Consideremos un duopolio en el que las empresas 1 y 2, que fabrican un producto idéntico a los ojos de los consumidores, compiten entre sí. La función de costes de la empresa 1 es lineal (costes marginales constantes) y puede ser $\underline{c}q_1$ o $\overline{c}q_1$, donde q_1 es la cantidad que produce y $\overline{c} > \underline{c}$. Únicamente la empresa 1 sabe cuál de las dos es exactamente (empresa informada o empresa con información privada). La empresa 2, por el contrario, solo conoce la distribución de probabilidad de la que proviene la función de costes de la empresa 1: sabe que el coste marginal de la empresa 1 puede ser $\underline{c}$ con probabilidad γ, $0 < \gamma < 1$, o $\overline{c}$ con probabilidad $1 - \gamma$.[1] La empresa 2 es, pues, un jugador desinformado respecto a los costes que tiene la empresa 1. La función de costes de la empresa 2 es con seguridad cq_2, donde q_2 es la cantidad que produce esta empresa y $0 \leq \underline{c} < c < \overline{c}$. Que la función de costes de la empresa 2 es cq_2 lo sabe tanto ella como la empresa 1 (información pública). La función inversa de demanda también es conocida públicamente y viene dada por $p(Q) = \text{máx}\{0, a - (q_1 + q_2)\}$, donde el parámetro a mide el tamaño del mercado y es tal que $a > \overline{c}$. Las empresas compiten mediante la fijación simultánea de las cantidades que cada una desea producir.

Para formalizar esta situación como un juego bayesiano estático basta tener en cuenta que la empresa 1 puede ser de dos tipos diferentes, cada uno correspondiente a un posible coste marginal, con lo cual $\mathcal{T}_1 = \{\underline{c}, \overline{c}\}$, mientras que la empresa 2 no tiene tipos, ya que su coste marginal es, con certeza, c. Las acciones posibles para cada empresa i son los niveles de output que puede producir, $q_i \geq 0$, y dado que los movimientos de los jugadores son simultáneos, resulta $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i = [0, \infty)$, $i = 1, 2$. Por último, los pagos para cada empresa son los beneficios correspondientes, $\pi_i = (a - c_i - q_1 - q_2)\, q_i$.

En este contexto, la estrategia óptima de cada empresa es decidir, para cada uno de los tipos en los que podría encarnarse, la cantidad que constituye la mejor respuesta frente a la cantidad que conjetura que, según su creencia sobre el tipo de empresa rival, producirá dicha empresa rival. Por lo tanto, un equilibrio bayesiano

[1] La diferencia $\overline{c} - \underline{c}$ puede interpretarse como la cantidad de incertidumbre que tiene la empresa 2 respecto a los costes de la empresa 1.

$$\Pr\left(B_i \leq b\right) = \Pr\left(v_i \leq B^{-1}(b)\right) = F\left(B^{-1}(b)\right) = \frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}} \tag{5.7}$$

Cualquier licitante distinto de i (por ejemplo, el licitante 1) querrá conocer la probabilidad (5.7) porque así, cuando puja b, conoce la probabilidad de que i puje menos que b y, por tanto, sabe con qué probabilidad ganará él la subasta. Dado que los demás licitantes distintos del 1 utilizan la función de puja B y dado que sus valoraciones tienen la misma distribución y, además, son independientes entre sí, entonces la probabilidad de que todos los demás licitantes distintos del 1 pujen menos que b es

$$\Pr\left(B_i \leq b,\ \forall\, i = 2, 3, \ldots, n\right) = \left(\frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}}\right)^{n-1}$$

Esta es la probabilidad de que el licitante 1 gane la subasta pujando b. ¿Qué precio está implícito en su puja? Si gana la subasta, obtiene el pago $v_1 - b$, mientras que si la pierde a pesar de su puja, obtiene 0. Por lo tanto, su utilidad esperada es

$$E[u_1] = (v_1 - b)\left(\frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}}\right)^{n-1}$$

y la puja óptima será la que maximiza dicha utilidad esperada. La correspondiente CPO es

$$0 = \frac{\partial E[u_1]}{\partial b} = (-1)\left(\frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}}\right)^{n-1} + (v_1 - b)(n-1)\left(\frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}}\right)^{n-2}\frac{1}{\overline{v}}\,\frac{\mathrm{d}B^{-1}(b)}{\mathrm{d}b}$$

que se puede reescribir como

$$\left(\frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}}\right)^{n-1} = (v_1 - b)(n-1)\left(\frac{B^{-1}(b)}{\overline{v}}\right)^{n-2}\frac{1}{\overline{v}}\,\frac{\mathrm{d}B^{-1}(b)}{\mathrm{d}b} \tag{5.8}$$

y donde $\frac{\mathrm{d}B^{-1}(b)}{\mathrm{d}b}$ es la pendiente de la función inversa de puja B^{-1} evaluada en b. Simplificando (5.8), resulta

$$B^{-1}(b)\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}v}\left(B^{-1}(b)\right) = (v_1 - b)(n-1) \tag{5.9}$$

Al asumir que todos los licitantes son simétricos (utilizan la misma función de puja B) y que b es la puja óptima para el licitante con valoración v_1, tenemos que $B^{-1}(b) = v_1$ y $b = B(v_1)$. Por lo tanto, la expresión (5.9) se convierte (escribiendo, por simetría, v en lugar de v_1) en $v\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}v}(v) = (v - B(v))(n-1)$ o, lo que es lo mismo, en

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}v}(v) = \left(1 - \frac{B(v)}{v}\right)(n-1)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y que, junto con la condición lateral $B(0) = 0$ (que indica que la puja de un licitante con valoración nula es 0), tiene como solución $B(v) = \frac{n-1}{n}v$. ■

La puja de cada licitante está relacionada, pues, con su valoración v a través del factor $\frac{n-1}{n}$, donde n es el número de licitantes que participan en la subasta. Dado que $\frac{n-1}{n} < 1$, los licitantes pujan, en el EB, por debajo de sus valoraciones. Este resultado contrasta con el que surge en una subasta sellada al segundo precio, en cuyo caso los licitantes pujan por su verdadero valor (es decir, se comportan honestamente).

Esto se debe a dos efectos contrapuestos asociados a cualquier puja que se haga en una subasta al primer precio: cuanto mayor sea la puja, mayor será la probabilidad de ganar (lo cual alienta a los licitantes a aumentar sus pujas); sin embargo, cuanto menor es la puja, mayor será el pago que se obtiene en caso de ganar (lo cual incentiva a cada licitante a reducir su puja). En definitiva, la mayor cuantía del segundo efecto hace que en una subasta sellada al primer precio la puja de cada licitante sea inferior a su valoración. Sin embargo, estos dos efectos contrapuestos no existen en la subasta al segundo precio, razón por la cual los licitantes pujan por una cuantía igual a la verdadera valoración que tienen del objeto.

De la Proposición (5.6) se deriva que cuando hay solo dos licitantes, $i = 1, 2$, cada uno puja por la mitad de su valoración, $b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$. En efecto, si las valoraciones se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, entonces, dada la estrategia (puja) del licitante 2, el licitante 1 no ofrecerá más que ½ por el objeto, porque ½ es justamente la valoración media que espera que tenga el licitante 2. (Lo mismo sucede con el licitante 2.) El licitante 1, ofreciendo b, gana la subasta si $b > b_2 = \frac{v_2}{2}$, es decir, si $v_2 < 2b$, y, por tanto, el pago esperado que obtiene (en caso de ganar) es $(v_1 - b) \times \Pr(v_2 < 2b)$. Este pago es

$$\begin{aligned}(v_1 - b)\int_0^{2b} f(v_2)\,\mathrm{d}v_2 &= (v_1 - b)\left[v_2\right]_0^{2b} = \\ &= (v_1 - b)\,2b\end{aligned}$$

y para maximizarlo ha de elegir $b = \frac{v_1}{2}$. A partir de aquí, y teniendo en cuenta el resultado de la Proposición 5.6, un aumento del número de licitantes hace que sean más agresivos y que sus pujas estén cada vez más próximas a sus valoraciones.

5.4.3. El punto de vista del subastador

¿Qué ingreso puede esperar el subastador si organiza una subasta sellada al segundo precio y a ella acuden n licitantes neutrales al riesgo? ¿Y si la subasta es al primer precio? Supongamos que, con independencia de la subasta que implemente, el valor de cada licitante i por el objeto subastado, v_i, es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, \overline{v}]$, siendo v_i independiente de v_j, $\forall j \neq i$. Los licitantes son simétricos, con lo cual la distribución de v_i es igual para

Juegos bayesianos dinámicos

6

6.1. Introducción

A diferencia de lo que ocurre en un juego bayesiano estático, en uno dinámico hay al menos un jugador que, antes de tomar su decisión, observa lo que algún otro jugador ha elegido previamente. Esto tiene consecuencias importantes. Por ejemplo, si el primer jugador en mover es el que tiene información privada (jugador informado), y dado que las acciones que tome pueden servir para revelar u ocultar dicha información, la transmisión de información (veraz o no) se convierte en parte esencial de la conducta estratégica de los jugadores. En particular, cuando revelar su tipo beneficia a sus intereses, entonces el jugador informado querrá transmitir —mediante señales observables y creíbles— información honesta sobre dicho tipo; por el contrario, cuando revelarlo le perjudique (cosa que ocurrirá cuando su tipo es malo[1]), querrá emular el comportamiento de un tipo más favorable para sus intereses.[2] Por su parte, el jugador o jugadores no informados, a partir de las acciones que observan del jugador o jugadores informados, aprenden algo (o no aprenden nada, dependiendo de la señal que reciban) sobre el juego que se está jugando y, una vez que han aprendido algo (o no), toman sus propias decisiones.

¿Cómo se incorpora al juego este aprendizaje por parte del jugador no informado? Una vez que observa la señal enviada por el jugador informado, el jugador o jugadores no informados deben revisar, mediante actualización bayesiana, el sistema de creencias que tienen *a priori* sobre el tipo t de jugador con el que están interaccionando. Así, de las creencias *a priori*, $\Pr(t)$, se pasa a las creencias *a posteriori* o creencias revisadas, es decir, a la distribución de probabilidad sobre el conjunto de tipos del jugador informado tras observar la señal que este ha enviado, $\Pr(t|\text{señal o acción observada})$. Este proceso de transmisión de información en un juego bayesiano dinámico es lo que, en los juegos en los que hay solo dos jugadores (un emisor y un receptor), se conoce como *señalización.*

---

[1] Un tipo malo puede referirse a una baja habilidad para un individuo, un elevado coste de producción para una empresa, etc. Un tipo bueno, a una alta habilidad, un reducido coste de producción, etc.

[2] Una señal consistente en que el jugador informado comunica verbalmente de qué tipo es no resulta creíble, salvo que los intereses de los jugadores coincidan plenamente. Hablar no es una señal creíble porque no tiene coste.

Algo similar ocurre cuando el primer jugador que mueve es el jugador no informado. En este caso, el jugador que mueve primero (jugador no informado) puede jugar de manera que el que mueva más tarde (jugador informado) revele su información privada. Para ello ofrece un menú de contratos al objeto de que cada tipo de jugador informado elija el contrato que ha sido específicamente diseñado para él y no se desvíe a otro contrato que ha sido diseñado para otro tipo distinto. Lo que pretende con el menú de acciones es que el jugador informado responda a la acción que, de entre todas, convenga más a su tipo (por ser la que le reporta un mayor pago esperado) y no a la que sea más adecuada para otro tipo distinto del que realmente es. Este proceso de obtención de información por parte del jugador no informado haciendo que cada tipo de jugador informado responda a la opción específicamente diseñada para ese tipo y no para ningún otro distinto es lo que se conoce como *filtración* o *autoselección*.

En cualquiera de las dos situaciones mencionadas, la *transformación* de Harsanyi permite pasar de un juego con información incompleta a otro con información completa aunque imperfecta. En el caso de los juegos bayesianos estáticos, haciendo que el jugador desinformado tenga expectativas de que el jugador informado sea de un tipo u otro, para lo cual asigna probabilidades a cada uno de los tipos posibles de jugador informado. La novedad, ahora, en el caso de los juegos bayesianos dinámicos, es la transmisión de información entre los jugadores y la necesidad de incorporar la racionalidad secuencial. Por esa razón, es imprescindible contar con una herramienta que, a lo largo del juego, refleje las probabilidades que cada jugador atribuye a los distintos tipos de los rivales: el *sistema de creencias*. El desarrollo de la interacción entre los jugadores tiene, pues, dos elementos de igual relevancia, las estrategias y las creencias. De esta forma, el concepto de solución apropiado para un juego dinámico con información incompleta es el de equilibrio de Nash bayesiano perfecto, o equilibrio bayesiano perfecto sin más (Selten, 1975), que combina estrategias de los jugadores y creencias del jugador o jugadores no informados. Para ello, es necesario hacer supuestos bajo los cuales los jugadores establecen creencias sobre el nodo por el que va a pasar el juego y que esas creencias, y las correspondientes mejores respuestas, sean luego coherentes.[3]

Hasta ahora hemos presentado tres conceptos de equilibrio: el equilibrio de Nash (EN) para juegos estáticos de información completa, el equilibrio bayesiano (EB) para juegos estáticos con información incompleta y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) para juegos dinámicos con información completa. El ENPS es, sin embargo, inoperante en juegos dinámicos con información incompleta porque estos carecen de subjuegos propios, es decir, subjuegos distintos del juego en su totalidad. La forma de superar esta inoperancia del ENPS es ampliar el concepto de perfección en los subjuegos para requerir que los jugadores, mediante la regla de Bayes, actualicen racionalmente sus creencias respecto al juego que se está jugando. Así se llega al equilibrio bayesiano perfecto (EBP) como solución

[3] Las creencias son importantes en cualquier juego de información incompleta.

adecuada para juegos dinámicos con información incompleta. De la misma forma que el ENPS elimina cualquier EN que esté sustentado en amenazas increíbles, el EBP puede ser visto como un refinamiento del EB.

El EBP exige que en cada contingencia posible del juego las estrategias de cada jugador sean mejores respuestas, dadas sus creencias o conjeturas en cada nodo dentro de su conjunto de información, y, además, que dichas creencias sean coherentes con las estrategias óptimas de los jugadores y la distribución de probabilidad con la que elige la *Naturaleza*, utilizando para ello la regla de Bayes siempre que sea posible. A partir de aquí, un juego dinámico con información incompleta puede tener múltiples EBP porque estemos en nodos de probabilidad cero y, en consecuencia, las creencias *a priori* no puedan actualizarse con la regla de Bayes. En tal caso, el EBP no impone ninguna restricción a las creencias, razón por la cual estas son arbitrarias y podemos elegir cualquier valor para ellas. Pues bien, la literatura se ha ocupado de imponer restricciones a las creencias cuando la regla de Bayes es inaplicable (creencias fuera de la trayectoria del equilibrio), refinando el concepto de EBP. Los refinamientos basados en la noción de dominación y el criterio intuitivo (Cho y Kreps, 1987), así como el concepto de divinidad (Banks y Sobel, 1987) se utilizan precisamente para restringir las creencias de fuera del equilibrio.

El EBP refina el concepto de EB con la idea de la racionalidad secuencial. Sin embargo, no refina el concepto de ENPS. Para conseguirlo, Fudenberg y Tirole (1991) proponen un concepto de equilibrio aún más estricto, el equilibrio bayesiano perfecto en subjuegos (EBPS), que refina todos los conceptos anteriores, como se muestra en la Figura 6.1.

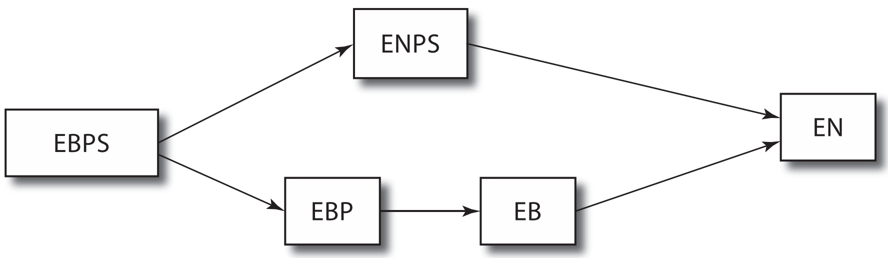

Figura 6.1. Relación entre diversos conceptos de equilibrio

En el EBPS los jugadores establecen creencias y restricciones sobre todos los conjuntos de información por los que puede pasar el desarrollo del juego. El EBP solo impone restricciones sobre los conjuntos de información (y sus nodos) situados en la trayectoria de equilibrio del juego. El EBPS es más restrictivo que el EBP, ya que impone restricciones sobre todas las posibles trayectorias (tanto de equilibrio como de fuera del equilibrio) y no solo sobre los nodos por los que pasa la trayectoria de equilibrio.

Un concepto alternativo al EBPS es el de equilibrio secuencial (Kreps y Wilson, 1982), el cual también parte de estrategias y creencias y exige que las estrategias sean óptimas en cualquier contingencia del juego, dadas las creencias. Sin embargo, y, a partir de (6.5), la estrategia óptima para el jugador 2 es

$$s_2 = \begin{cases} F, & \text{si } \lambda < \frac{1}{5} \\ \overline{E}, & \text{si } \frac{1}{5} < \lambda < \frac{1}{3} \\ \underline{E}, & \text{si } \lambda > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\lambda < 1/5$, entonces (F, A) y (F, L) son EBP con las creencias (arbitrarias) $\gamma = 2/7$; si $1/5 < \lambda < 1/3$, el jugador 1 elige $\overline{E}$ y la actualización bayesiana de las creencias lleva a $\gamma = \frac{\lambda}{\lambda+1-\lambda} \neq \frac{2}{7}$, con lo cual no existe EBP; por último, si $\lambda > 1/3$, tanto $(\underline{E}, A)$ como $(\underline{E}, L)$ son EBP del juego con las creencias arbitrarias $\gamma = 2/7$. ■

■ Ejemplo 5

Consideremos de nuevo un juego como el del Ejemplo 4, pero ahora con una modificación en los pagos de los jugadores de forma que $x > 0$, tal como se muestra en Figura 6.6.

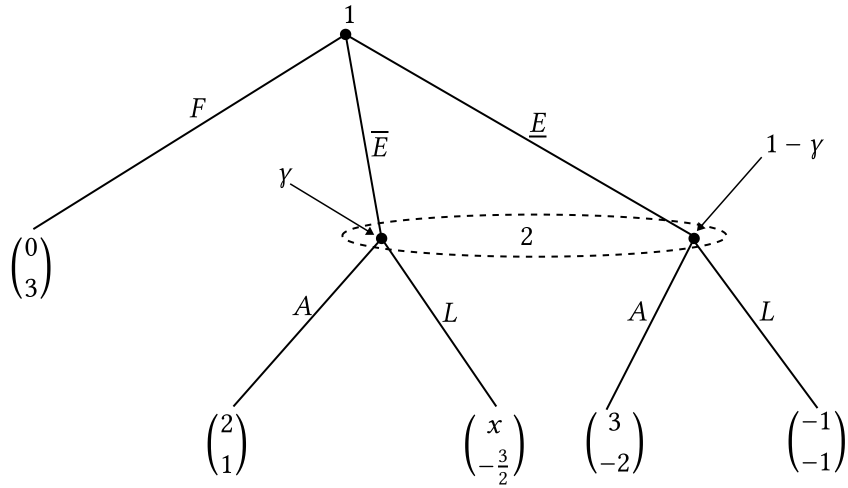

Figura 6.6. Otra vez el juego del Ejemplo 4

En este caso, llegamos al siguiente resultado.

Proposición 6.4. *Sea γ el sistema de creencias a priori del jugador 2. Entonces:*

a) Si $\gamma \in \left(\frac{2}{7}, 1\right)$, el juego de la Figura 6.6 tiene el EBP en estrategias puras estipulado en la Proposición 6.3 a).

b) Si $\gamma \in \left(0, \frac{2}{7}\right)$, el juego carece de EBP.

c) Si $\gamma = 2/7$, el juego de la Figura 6.6 tiene tres EBP en estrategias puras, dados en la Proposición 6.3 c) y, además, el EBP en estrategias mixtas $\left\{\left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \left(\frac{x+1}{x+2}, \frac{1}{x+2}\right);\right.$

$\gamma = \frac{2}{7}\}$, donde el jugador 1 juega $\overline{E}$ con probabilidad 2/7 y $\underline{E}$ con probabilidad 5/7, mientras que el jugador 2 juega A con probabilidad $\frac{x+1}{x+2}$ y L con probabilidad $\frac{1}{x+2}$. (Es fácil ver que al aumentar el valor de x, aumenta la probabilidad con la que el jugador 2 juega A y disminuye la probabilidad con la que juega L.)

Demostración Empecemos suponiendo que el sistema de creencias *a priori* del jugador desinformado (jugador 2) es $(\gamma, 1-\gamma)$: cree que con probabilidad γ el juego está en el nodo izquierdo de su conjunto de información y con probabilidad $1-\gamma$, en el nodo derecho. Entonces, su pago esperado es el dado en (6.3) y su estrategia óptima, la dada en (6.4).

a) Si $\gamma > 2/7$, el jugador 2 jugará A y, por tanto, el jugador 1 prefiere jugar $\underline{E}$. Ahora bien, en este caso, el nodo izquierdo del conjunto de información del jugador 2 no está en la trayectoria del equilibrio, con lo cual las creencias no pueden ser actualizadas mediante la regla de Bayes; en su lugar, imponemos, de forma arbitraria, cualquier valor a γ, como por ejemplo $\gamma > 2/7$. Tenemos, pues, el EBP dado por $(\underline{E}, A)$ con $\gamma > 2/7$.

b) Si $\gamma < 2/7$, el jugador 2 elegirá L y la mejor reacción del jugador 1 frente a esta elección es jugar $\overline{E}$, ya que $x > 0$. Entonces, el nodo izquierdo del conjunto de información del jugador 2 está en la trayectoria del equilibrio y, por actualización bayesiana, resulta $\gamma = \frac{1}{1} = 1$. Ahora bien, $\gamma = 1$ es incompatible con $\gamma < 2/7$. No existe, pues, un EBP soportado por el sistema de creencias $\gamma < 2/7$.

c) Por último, si $\gamma = 2/7$, el jugador 2 se muestra indiferente entre jugar la estrategia pura A o la estrategia pura L. Supongamos que juega A con probabilidad λ y L con probabilidad $1-\lambda$. Entonces, el pago esperado para el jugador 1 es

$$E[u_1] = \begin{cases} 0, & \text{si juega } F \\ 2\lambda + x(1-\lambda), & \text{si juega } \overline{E} \\ 4\lambda - 1, & \text{si juega } \underline{E} \end{cases} \tag{6.6}$$

De (6.6) se concluye que $\overline{E}$ domina a F, ya que x es positivo, con lo cual $2\lambda + x(1-\lambda) > 0$. Por lo tanto, el jugador 1 nunca jugará F y, en consecuencia, su pago esperado se reduce a

$$E[u_1] = \begin{cases} 2\lambda + x(1-\lambda), & \text{si juega } \overline{E} \\ 4\lambda - 1, & \text{si juega } \underline{E} \end{cases}$$

Sea θ la probabilidad de que el jugador 1 juegue $\overline{E}$ y $1-\theta$ la probabilidad de que juegue $\underline{E}$, en cuyo caso la regla de Bayes requiere que $\gamma = \frac{\theta}{\theta+(1-\theta)} = \theta = \frac{2}{7}$. Además, para que el jugador 1 esté indiferente entre $\overline{E}$ y $\underline{E}$, ha de suceder que $2\lambda + x(1-\lambda) = 4\lambda - 1$, de donde $\lambda = \frac{x+1}{x+2}$. ∎

■ Ejemplo 6

Consideremos el siguiente juego entre los jugadores 1 y 2. La *Naturaleza* (jugador 0) es el jugador que desencadena el juego seleccionando x o z como tipos para el jugador 1. La probabilidad de que la elección de la *Naturaleza* sea x es 0,6 y la probabilidad de que sea z es 0,4. A continuación, el jugador 1 elige A o B sin saber qué ha decidido previamente la *Naturaleza*. Luego, el jugador 2 observa qué ha elegido el jugador 1 y, a continuación, elige a o b. Si el jugador 1 elige A, el jugador 2 sabe qué ha elegido la *Naturaleza* (sabe si el juego está en un conjunto de información u otro), mientras que si 1 elige B, el jugador 2 no sabe qué ha elegido la *Naturaleza* (no sabe en qué nodo de su conjunto de información está el juego). La forma extensiva de este juego bayesiano dinámico es la que se representa en la Figura 6.7.

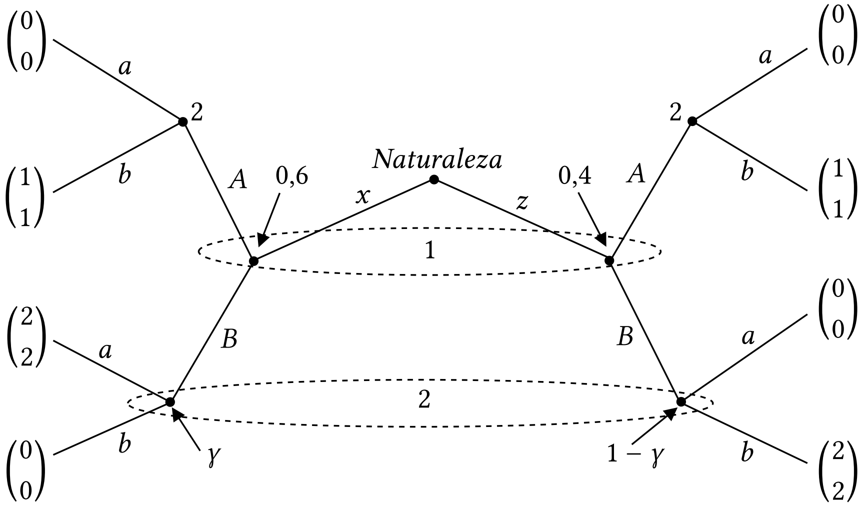

Figura 6.7. Forma extensiva del juego del Ejemplo 6

Dado que el jugador 1 tiene un conjunto de información con dos nodos de decisión y el jugador 2 tiene tres conjuntos de información, dos de ellos con un solo nodo y uno con dos nodos, los respectivos conjuntos de estrategias son $\mathcal{S}_1 = \{A, B\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bba, bab, bbb\}$.

Si resolvemos este juego, llegamos al siguiente resultado.

Proposición 6.5. *Sea γ el sistema de creencias a priori. Entonces, en el juego del Ejemplo 6 sucede lo siguiente:*

a) Si $\gamma < 1/2$, el juego carece de EBP.

b) Si $\gamma > 1/2$, el perfil de estrategias $\{(B, aaa)\}$ con las conjeturas $\gamma > 1/2$ es un EBP.[8]

[8] La estrategia aaa para el jugador 2 significa que juega a en el conjunto de información superior izquierdo de la Figura 6.7, a en el conjunto de información superior derecho y a en el conjunto de información inferior. La interpretación de las demás estrategias es similar, yendo de izquierda a derecha y de arriba abajo.

con lo cual la mejor respuesta del jugador 1 de tipo x es $MR_{1x} = B(x)$. A su vez, el pago esperado para el jugador 1 de tipo z es

$$E\left[u_{1z}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}, & \text{si envía la señal } A \\ 2, & \text{si envía la señal } B \end{cases}$$

y, en consecuencia, $MR_{1z} = B(z)$. Llegamos, pues, a $(B(x), B(z))$ si $\mu \geq 2/3$, con lo cual las mejores respuestas no son mutuamente coherentes o, lo que es lo mismo, no tenemos un EBP (agrupador).

Consideremos ahora el caso $\mu \leq 2/3$ y veamos si $(A(x), A(z))$ forma parte o no de un EBP agrupador. La mejor respuesta del jugador 2 es la dada en (6.8). A su vez, la mejor respuesta del jugador 1 de tipo x a (6.8) se obtiene a partir de

$$E\left[u_{1x}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}, & \text{si envía la señal } A \\ 1 - \mu, & \text{si envía la señal } B \end{cases}$$

y resulta $MR_{1x} = A(x)$. Por otra parte, el jugador 1 de tipo z tiene como pago esperado

$$E\left[u_{1z}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}, & \text{si envía la señal } A \\ 1 - \mu, & \text{si envía la señal } B \end{cases}$$

y, por tanto, $MR_{1z} = A(z)$. Tenemos, pues, $(A(x), A(z))$, con lo cual hemos encontrado un EBP agrupador.

Consideremos ahora la estrategia $(B(x), B(z))$ para el jugador 1 y veamos si puede formar parte o no de un EBP agrupador. En este caso, las probabilidades revisadas del jugador 2 son las mismas que sus creencias *a priori*, es decir, $\mu = 1/2$, mientras que γ puede tomar cualquier valor arbitrario, ya que el correspondiente nodo está fuera de la senda de equilibrio. Entonces, si el jugador 2 observa la señal A por parte del jugador 1, su pago esperado es

$$E\left[u_2\right] = \begin{cases} 3\gamma + 4(1-\gamma) = 1, & \text{si juega } a \\ 1 - \gamma, & \text{si juega } b \end{cases}$$

con lo cual $MR_2(A) = a$, para todo γ. Por el contrario, si 2 observa que 1 ha enviado la señal B, entonces

$$E\left[u_2\right] = \begin{cases} \mu + (1-\mu) = 1, & \text{si juega } a \\ 3(1-\mu) = \frac{3}{2}, & \text{si juega } b \end{cases}$$

de donde $MR_2\left(A\right) = b$. En definitiva,

$$MR_2(A, B) = \begin{cases} a\left(A\right), & \text{para todo } \gamma \\ b(B), & \text{si } \mu = 1/2 \end{cases} \tag{6.9}$$

y frente a (6.11) la mejor reacción del jugador 1 de tipo x se obtiene a partir de

$$E\left[u_{1x}\right] = \begin{cases} 0 \times \mu + 1 - \mu = \frac{1}{2}, & \text{si envía la señal } B \\ 1 \times \gamma + 2 \times \left(1 - \gamma\right) = 2 - \gamma, & \text{si se desvía enviando la señal } A \end{cases}$$

con lo cual $MR_{1x} = A(x)$. Análogamente, si el jugador 1 es de tipo z

$$E\left[u_{1z}\right] = \begin{cases} 0 \times \mu + 1 - \mu = \frac{1}{2}, & \text{si envía la señal } B \\ 1 \times \gamma + 2 \times \left(1 - \gamma\right) = 2 - \gamma, & \text{si se desvía enviando la señal } A \end{cases}$$

de donde $MR_{1z} = A(z)$. Llegamos, pues, a $(A(x), A(z))$, y no a $(B(x), B(z))$ como habíamos supuesto. En definitiva, no tenemos un EBP (agrupador) porque las mejores respuestas de los jugadores no son mutuamente compatibles.

Proposición 6.10. *El único EBP agrupador del juego bayesiano dinámico de la Figura 6.11 es el dado por* $\left\{\left(A\left(x\right), A\left(z\right)\right), \left(b\left(A\right), a(B)\right); \gamma = 1/2, \mu \leq 2/3\right\}$.

6.6. Refinamientos del equilibrio bayesiano perfecto

■ Ejemplo 11

Consideremos tres jugadores —los jugadores 1, 2 y 3— que juegan el siguiente juego secuencial. El jugador 1 es el que da comienzo al juego eligiendo A o B. Si elige A, el juego termina y los jugadores reciben los correspondientes pagos. Por el contrario, si elige B, entonces son los jugadores 2 y 3 los que, después de observar que 1 ha elegido B, juegan eligiendo a o b (el jugador 2) y a' o b' (el jugador 3). Los jugadores 2 y 3 saben, en el momento en que tienen que elegir, qué ha elegido previamente el jugador 1 y, por tanto, saben dónde está situado el juego. Sin embargo, los jugadores 2 y 3 toman sus decisiones simultáneamente, con lo cual ninguno sabe qué ha elegido el otro. La forma extensiva de este juego es la que aparece representada gráficamente en la Figura 6.12.[15]

[15] Existe otra forma extensiva con la que poder representar el juego, en la que se intercambia de lugar en el árbol el jugador 2 por el jugador 3 (con el consiguiente cambio en el orden de los pagos en los vectores de pagos).

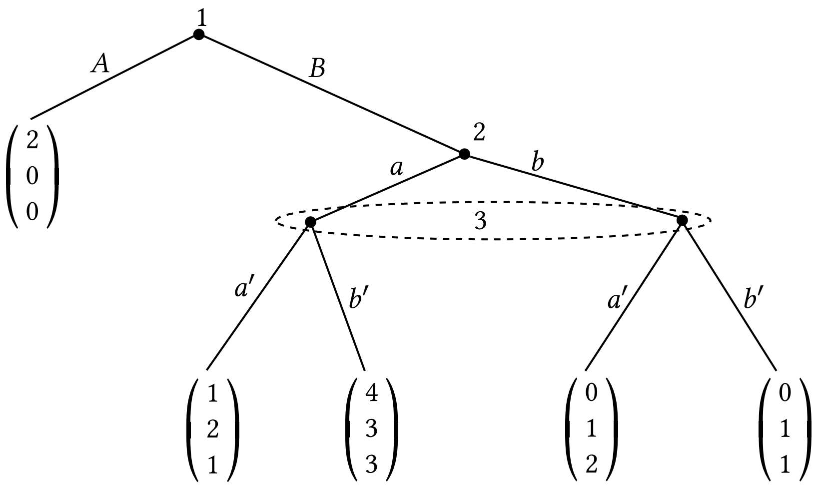

Figura 6.12. Forma extensiva del juego del Ejemplo 11

Teniendo en cuenta que los conjuntos de estrategias de los jugadores son, respectivamente, $\mathcal{S}_1 = \{A, B\}$, $\mathcal{S}_2 = \{a, b\}$ y $\mathcal{S}_3 = \{a', b'\}$, la representación normal del juego en forma extensiva de la Figura 6.12 es la dada por las dos matrices de la Tabla 6.2.

Tabla 6.2. Forma normal del juego de la Figura 6.12

3

a'

1 \ 2	a	b
A	2, 0, 0	2, 0 ,0
B	1, 2, 1	0, 1, 2

b'

1 \ 2	a	b
A	2, 0, 0	2, 0, 0
B	4, 3, 3	0, 1, 1

Los EN del juego del Ejemplo 11 son: (A, a, a'), (A, b, a'), (A, b', b) y (B, a, b'). Además, por inducción hacia atrás, es fácil ver que, de estos cuatro EN, solo (B, a, b') es equilibrio de Nash del subjuego dado por el juego completo y también del subjuego que empieza en el nodo del jugador 2. Es decir, únicamente (B, a, b') es ENPS.

Para determinar los EBP del juego, es necesario establecer creencias sobre los nodos del conjunto de información que tienen más de un nodo. En este caso, es el conjunto de información del jugador 3 el que tiene dos nodos. Si denotamos por l el nodo izquierdo y por r el nodo derecho, hemos de averiguar las creencias $\mu(l)$ y $\mu(r)$, es decir, la probabilidad que asigna el jugador 3 a que el juego esté situado en el nodo izquierdo de su conjunto de información y la probabilidad de que esté situado en el nodo derecho, respectivamente. Llegamos así a la forma extensiva del juego representada en la Figura 6.13.

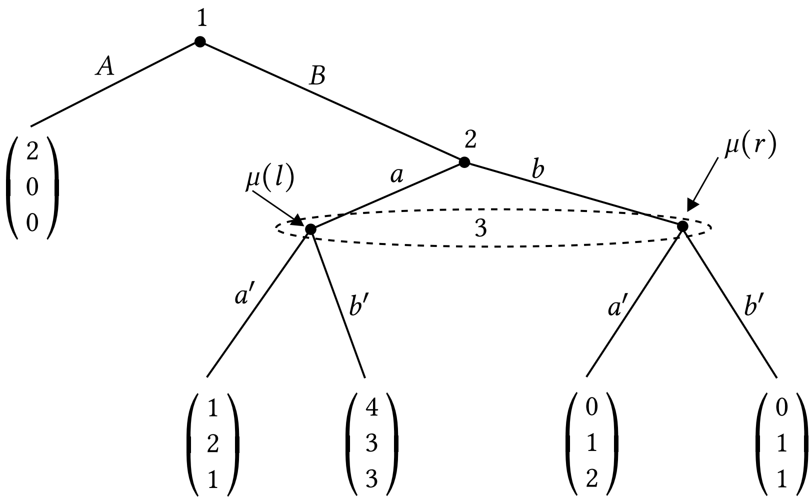

Figura 6.13. La forma extensiva del juego del Ejemplo 11 con las probabilidades de que el juego esté en cada nodo del conjunto de información del jugador 3

Como siempre, para encontrar un EBP tenemos que buscar un conjunto de estrategias condicionadas a cada conjunto de información y un sistema de creencias sobre cada nodo de todo conjunto de información tales que:

a) Las estrategias son óptimas (mejores respuestas) en cada conjunto de información, dado el sistema de creencias, es decir,

$$\sum_{x \in \mathcal{V}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \times \mu(x) \geq \sum_{x \in \mathcal{V}} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \times \mu(x)$$

para todo jugador i, para todo $s_i \in \mathcal{S}_i$, para todo nodo $x \in \mathcal{V}$ y para todo conjunto de información $\mathcal{V}$.

b) Las creencias son coherentes con las estrategias de equilibrio, es decir, la probabilidad condicionada de alcanzar el nodo x si se alcanza el conjunto de información $\mathcal{V}$ es

$$\mu\left(x\right) = \frac{\mu(x|s^*)}{\mu(\mathcal{V}|s^*)}$$

Se observa como solo se imponen restricciones en los conjuntos de información sobre las trayectorias de equilibrio, es decir, en los que $\mu\left(\mathcal{V} \mid s^*\right) > 0$. Fuera del equilibrio, $\mu\left(\mathcal{V} \mid s\right) = 0$ y, por tanto, no es aplicable la regla de Bayes, en cuyo caso se toma, arbitrariamente, cualquier valor entre 0 y 1.

En el juego de la Figura 6.13 la trayectoria del equilibrio pasa por el nodo l o bien por el nodo r. Si pasa por l, la coherencia impone que $\mu\left(l\right) = 1$, en cuyo caso tenemos un EBP, dado por el conjunto de estrategias y el sistema de creencias

Aplicaciones de los juegos bayesianos dinámicos 7

7.1. Introducción

Tal como hemos visto en los capítulos anteriores, en un juego dinámico el jugador o jugadores que eligen más tarde que otros observan las acciones que han elegido los jugadores que han jugado antes que ellos. Por otra parte, en un juego de información incompleta hay al menos un jugador que no conoce con certeza los conjuntos de acciones, las funciones de pagos y/o la racionalidad del resto de los jugadores. Pues bien, en este capítulo analizaremos situaciones en las que estas dos características aparecen yuxtapuestas y, por tanto, pueden ser analizadas a la luz de los juegos bayesianos dinámicos.

Por ejemplo, en un mercado en el que compitan dos (o más) empresas y una de ellas toma decisiones antes que la otra (u otras) puede suceder que cada empresa conozca su coste de producción y que, sin embargo, ninguna conozca los costes de las demás. Estaríamos, pues, ante un juego dinámico con información incompleta, si bien simétrica porque la falta de información afecta por igual a todas las empresas que intervienen en el juego. En estas condiciones, es posible que la empresa que mueva en primer lugar tenga incentivos para comunicar, a través de la cuantía de su acción (la cantidad producida o el precio del producto), que es de un determinado tipo —de coste bajo o de coste alto, por ejemplo— y no de otro. Si esto es así, una empresa que ejerza el papel de líder moviendo antes que ninguna otra y cuyo coste marginal de producción (bajo o alto) sea desconocido por la empresa seguidora, puede tener interés en producir una elevada cantidad de producto —mayor, por ejemplo, que si la información fuese completa— para comunicar a la empresa seguidora que su coste es bajo y, al mostrarse más agresiva, inducir a esta última a que reduzca su nivel de producción. Asimismo, el fabricante de un producto, que conoce la verdadera calidad del producto, mientras que los compradores no, puede tener incentivo para realizar alguna acción (acompañar la venta del producto con una garantía, realizar un elevado nivel de publicidad, fijar un precio elevado, etc.) para transmitir a los compradores que el producto es de alta calidad. Una empresa cuyo coste marginal de producción sea desconocido puede estar tentada a producir una elevada cantidad con la intención de comunicar a una potencial empresa que quiera entrar en el mercado que su coste de producción es reducido y que, por tanto, será agresiva y luchará contra su entrada, desencadenando, por ejemplo, una guerra de precios. En la misma línea, una empresa que contrata a un trabajador para realizar una determinada tarea puede desconocer la verdadera productividad del trabajador, en tanto que el trabajador puede tener una idea más aproximada de la misma;

por esta razón, el trabajador podría estar interesado en destinar recursos y esfuerzo a conseguir una titulación que lo acredite como un trabajador de alta productividad a los ojos de la empresa (aunque dicho proceso de educación no sirva necesariamente para aumentar la productividad) para tratar de obtener el mayor salario posible. Una compañía de seguros que sabe que los individuos que pueden adquirir un seguro son heterogéneos en cuanto al riesgo que corren unos y otros, pero no sabe cuál es el riesgo concreto de un determinado individuo que compra un seguro y, por tanto, está en desventaja informativa con respecto a él y tiene que decidir su estrategia óptima (el contrato de seguro que ha de ofrecer al asegurado), sabiendo que el asegurado decidirá aceptar o rechazar el contrato una vez que lo haya observado. Una compañía aérea que desconoce la disponibilidad marginal a pagar por el viaje de los diversos pasajeros que transporta ha de determinar qué precio cobrar a cada uno de ellos. Un restaurante que desconoce la disposición a pagar de sus clientes ha de diseñar el menú y el precio adecuado para cada tipo de cliente...

A pesar de que los ejemplos mencionados no agotan la librería de casos, son ilustrativos de la relevancia económica de los juegos bayesianos dinámicos. Es por ello que en este capítulo analizaremos situaciones como las mencionadas. Concretamente, en la Sección 7.2 se estudia la competencia secuencial con información incompleta. En la Sección 7.3 se analizan los juegos de señalización y, en particular, algunos de los juegos de señalización más genuinos como el que ilustra el papel de la educación superior, el comportamiento de los agentes en los mercados de seguros y, por último, el funcionamiento de las garantías como señal de calidad.

7.2. Competencia secuencial con información incompleta

En esta sección examinamos el funcionamiento de los mercados en los que las empresas que operan en ellos compiten de manera secuencial y, además, la información sobre los beneficios que obtienen es incompleta. Nos restringiremos a mercados en los que solo operan dos empresas y la información incompleta sobre los pagos proviene del hecho de que una empresa no conoce el nivel exacto de los costes marginales de la otra empresa.

7.2.1. La empresa líder conoce privadamente su coste marginal

Consideremos un mercado en el que operan las empresas 1 y 2. Ambas fabrican un producto idéntico a los ojos de los consumidores y compiten en cantidades de forma secuencial. La función de demanda de mercado es $p(q)) = \text{máx}\{0, 1 - (q_1 + q_2)\}$, donde q_1 es el output que produce la empresa 1 y q_2 el que produce la empresa 2. El tamaño de mercado se normaliza en 1.

La empresa 1 conoce exactamente su coste marginal de producción, que puede ser reducido, $\underline{c}$, o elevado, $\overline{c}$, siendo $\overline{c} > \underline{c}$. Lo único que sabe la empresa 2 es que

Una categoría particular de juegos dinámicos: los juegos repetidos 8

8.1. Introducción

Un juego repetido o superjuego es un juego simultáneo —conocido como juego de etapa o juego constituyente— que se juega repetidamente durante un número finito o infinito de veces. Además, los jugadores son siempre los mismos y todos conocen, al comienzo de cada nueva repetición del juego de etapa, qué ha sucedido en las rondas previas que ya se han jugado, es decir, todos conocen, al principio de cada periodo, la *historia* del juego hasta ese periodo. Se trata, pues, de un juego dinámico en el que los jugadores pueden condicionar sus acciones en cada ronda al comportamiento de todos los jugadores en las rondas previas y, en consecuencia, pueden optar por unas acciones u otras dependiendo de las consecuencias que tendrán en posteriores rondas. Si denotamos el juego de etapa por $\mathcal{G}$ en su forma normal, el correspondiente juego repetido se representa como $\mathcal{G}^T$, siendo $T < \infty$ cuando el número de veces que se repite el juego es finito y conocido o bien $T = \infty$ cuando es infinito, en cuyo caso el juego no tiene determinado un final que los jugadores puedan conocer de antemano, sino que en cada periodo t existe una probabilidad positiva de seguir con el juego durante el siguiente periodo $t + 1$.

La importancia de los juegos repetidos radica en que la conducta estratégica de los jugadores cuando interactúan más de una vez a lo largo del tiempo puede ser muy distinta de la que exhiben en el juego de etapa. Por ejemplo, si el juego de etapa $\mathcal{G}$ es el *dilema del prisionero*, en el cual cada jugador tiene incentivos para desviarse unilateralmente de la solución Pareto eficiente (solución cooperativa o solución que consistiría en "no confesar" por parte de cada jugador) y, por tanto, esta no define un equilibrio de Nash (EN),[1] podría suceder que se obtuviese cooperación, es decir, que cada jugador decidiese "no confesar", como EN del juego repetido $\mathcal{G}^T$. De hecho, averiguar bajo qué condiciones la cooperación puede sostenerse como EN en $\mathcal{G}^T$ a pesar de que esto no es EN en el juego de etapa $\mathcal{G}$ es de crucial importancia.[2] Para ello, será necesario definir, para cada jugador, qué se entiende por estrategia y qué se entiende por pago en el juego repetido. Una estrategia para un jugador en $\mathcal{G}^T$ es un plan que especifica qué acción adoptar en cada periodo t como función de

[1] Véase el Capítulo 2.

[2] Dado que en los juegos no cooperativos no se negocia ningún acuerdo, no interviene ningún tercero que haga cumplir acuerdo alguno. Por lo tanto, habrá cooperación entre los jugadores (que actúan independientemente) únicamente cuando cada uno de ellos considere que cooperar es óptimo para sus intereses.

cada posible historia del juego en t. La historia del juego en el periodo t no es más que la secuencia de las acciones y los pagos de todos y cada uno de los jugadores[3] que se han sucedido a lo largo de los periodos previos a t, es decir, hasta el momento en que son elegidas las estrategias para el periodo t. Por otra parte, la ganancia de cada jugador en un juego repetido $\mathcal{G}^T$ es la ganancia media por cada repetición del mismo (si el número de veces que se repite es finito) o la corriente actualizada de pagos de las sucesivas repeticiones (si el horizonte del juego es infinito).

En general, el aspecto más relevante de los juegos repetidos es analizar cómo la repetición del juego de etapa da lugar a que surjan EN que, sin embargo, no son EN en el juego de etapa $\mathcal{G}$. En efecto, el *teorema folk* o *teorema de tradición oral* establece que el conjunto de EN en los juegos repetidos es mucho mayor que el conjunto de EN de sus correspondientes versiones estáticas. La explicación reside en que las expectativas de los jugadores sobre el futuro pueden inducirles a utilizar estrategias que en un contexto estático no serían óptimas.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 8.2 se definen las estrategias y otros conceptos importantes en el estudio de los juegos repetidos. En la Sección 8.3 se analizan los juegos que se repiten un número finito de veces y en la Sección 8.4 los juegos que se repiten a lo largo de un horizonte infinito. La idea fundamental de estas dos últimas secciones es que los equilibrios de los juegos repetidos finitos son sustancialmente distintos de los que existen en los superjuegos infinitos. Ello se debe a que los primeros tienen un último periodo que da por terminado el juego, mientras que en los superjuegos infinitos no existe tal periodo final. Y, como veremos a lo largo del capítulo, la existencia de un último periodo en el juego tiene una influencia determinante en el comportamiento estratégico de los jugadores, ya que permite utilizar la inducción hacia atrás.

8.2. Estrategias de los jugadores en los juegos repetidos

Al igual que sucede con los juegos secuenciales, un juego repetido tiene más subjuegos que el determinado por el juego repetido en su conjunto. Cada repetición del juego define un subjuego propio y, por tanto, el concepto de equilibrio adecuado para los juegos repetidos es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS). Además, la mera repetición de un juego estático produce dos novedades. Por una parte, modifica las estrategias de cada jugador, en el sentido de que dichas estrategias pasan a tener tantos “planes de acción” como rondas se repite el juego. Por otra parte, da lugar a la aparición de nuevos conceptos como la *historia* del juego.

Definición 8.1. *Una estrategia para un jugador i en el juego repetido $\mathcal{G}^T$ es un plan de juego completo que especifica qué elegir en cada periodo t en función de cada posible historia del juego hasta $t-1$.*

[3] Acciones y pagos que todos los jugadores observan.

El hecho destacable es que con multiplicidad de EN en el juego de etapa $\mathcal{G}$, se pueden construir ENPS del juego repetido con estrategias que no forman parte de ningún EN del juego de etapa. Esto es lo que sucede con $\{(C, C), (A, B)\}$ en la Proposición 8.4.

Para abundar en este aspecto, consideremos el juego de etapa $\mathcal{G}$ cuya forma normal es la que aparece en la Tabla 8.4.

Tabla 8.4. Juego de etapa con múltiples equilibrios de Nash

1 \ 2	A	B
A	4, 4	1, 5
B	5, 1	0, 0

El juego de etapa de la Tabla 8.4 tiene dos EN en estrategias puras: (A, B) y (B, A). Dado que los pagos que proporcionan son, respectivamente, $(1, 5)$ y $(5, 1)$, se concluye que el primer equilibrio es "mejor" para el jugador 2 y el segundo es "mejor" para el jugador 1. El juego también tiene un tercer EN (en mixtas), consistente en que cada jugador elige A o B con la misma probabilidad, lo cual le proporciona el pago esperado $\frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 5 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{5}{2}$. Representemos en la Figura 8.1 estos tres vectores de pagos.

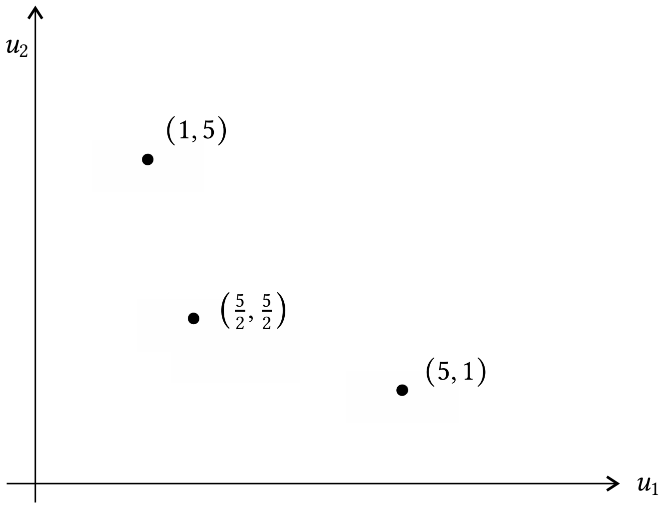

Figura 8.1. Pagos de equilibrio en el juego $\mathcal{G}$ de la Tabla 8.4

Supongamos ahora que el juego de etapa $\mathcal{G}$ se repite dos veces. Es evidente que $\mathcal{G}^2$ tiene dos ENPS: $\{(A, B), (A, B)\}$ y $\{(B, A), (B, A)\}$. Asimismo, se puede construir un ENPS de $\mathcal{G}^2$ que rinde pagos simétricos a los jugadores a base de alternar EN en cada subjuego (o repetición del juego), en cuyo caso tendremos $\{(A, B), (B, A)\}$ o $\{(B, A), (A, B)\}$. Por ejemplo, el ENPS $\{(A, B), (B, A)\}$ se consigue con el siguiente perfil de estrategias:

Para el jugador 1:

- Jugar A en $t = 0$ (esperando que el jugador 2 elija B).
- Jugar B en $t = 1$, después de cualquier historia posible del juego.

Para el jugador 2:

- Jugar B en $t = 0$ (esperando que el jugador 1 elija A).
- Jugar A en $t = 1$, después de cualquier historia posible del juego.[9]

Estas estrategias configuran un EN en cada subjuego: (A, B) en el subjuego definido por el periodo $t = 0$ y (B, A) en el de $t = 1$, y dan lugar a un vector de pagos medios en cada periodo de $(3, 3)$. Por lo tanto, en $\mathcal{G}^2$ no se descarta ninguno de los vectores de pagos factibles de $\mathcal{G}$ (los equilibrios de $\mathcal{G}$ se mantienen en $\mathcal{G}^2$, con el único matiz de que se repiten dos veces y, en consecuencia, los pagos medios por periodo de $\mathcal{G}^2$ coinciden con los de $\mathcal{G}$). Además, la alternancia de los equilibrios de $\mathcal{G}$ multiplican el número de posibles resultados en $\mathcal{G}^2$.[10]

Las nuevas posibilidades de pagos en el juego repetido $\mathcal{G}^2$ con respecto al juego de etapa $\mathcal{G}$, de las cuales solo se recoge el pago $(3, 3)$, convierten la Figura 8.1 en la Figura 8.2.[11]

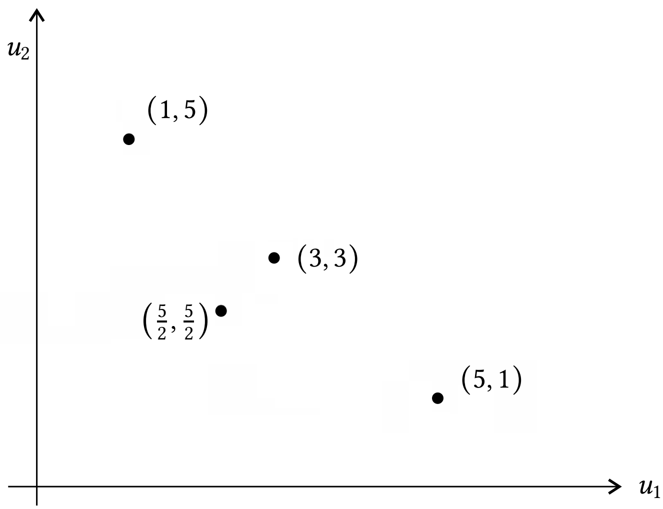

Figura 8.2. Pagos cuando $\mathcal{G}$ se repite dos veces

[9] El ENPS dado por la concatenación $\{(B, A), (A, B)\}$ se consigue con estrategias similares por parte de los jugadores.

[10] También se podría alternar entre estrategias puras de $\mathcal{G}$ en un periodo y estrategias mixtas de $\mathcal{G}$ en el otro, y obtendríamos más posibilidades de pagos en $\mathcal{G}^2$.

[11] La concatenación en las dos últimas rondas también podría ser $\{(A, B), (B, A)\}$.

¿Por qué los jugadores no juegan (A, A) las dos veces que se repite el juego de etapa $\mathcal{G}$, en cuyo caso obtendrían un pago de 4 por periodo? Porque si en algún periodo, o en los dos, se jugara (A, A), cada jugador se arrepentiría pensando que si hubiese elegido B podría haber conseguido un pago mayor a costa del rival. Ello es debido a que (A, A) no es un EN del subjuego que tiene lugar en ese periodo.

Si el juego de etapa se repite tres veces, y dado que los dos jugadores deben obtener el mismo pago medio por periodo, es evidente que intercambiar los EN (A, B) y (B, A) de $\mathcal{G}$ solo sirve para dos periodos del juego $\mathcal{G}^3$.[12] Para el periodo que queda por jugar —el primero— los jugadores deben jugar necesariamente (A, A) si quieren maximizar la ganancia media por periodo y que esta sea, además, simétrica.

Se añade, pues, una nueva posibilidad en $\mathcal{G}^3$: que los jugadores elijan A en $t = 0$ y que alternen entre A y B (o al revés) en los dos periodos siguientes. En este caso, tendríamos la trayectoria de equilibrio $\{(A, A), (A, B), (B, A)\}$ o bien la trayectoria $\{(A, A), (B, A), (A, B)\}$, que rinde el pago medio por periodo $\frac{4+5+1}{3} = \frac{10}{3}$ al jugador 1 y el pago medio por periodo $\frac{4+1+5}{3} = \frac{10}{3}$ al jugador 2, es decir, $(u_1, u_2) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$. Si añadimos las nuevas posibilidades de pagos de los jugadores a las de la Figura 8.2, el resultado es la Figura 8.3.

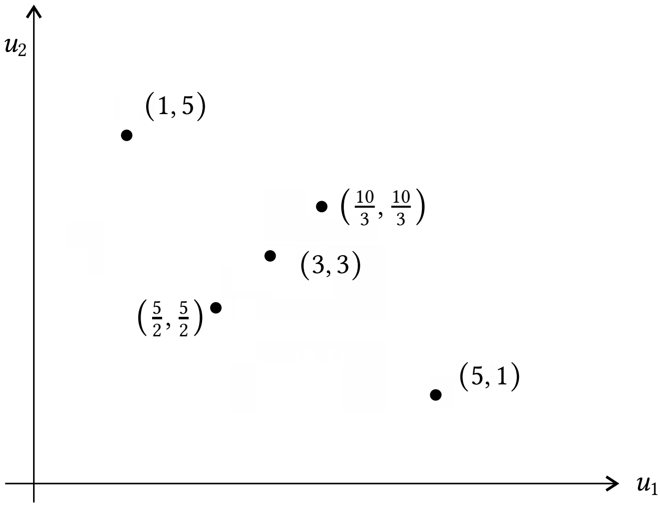

Figura 8.3. Pagos de los jugadores en $\mathcal{G}^3$

Cualquier solución simétrica que no sea $\{(A, A), (A, B), (B, A)\}$ o $\{(A, A), (B, A), (A, B)\}$ rinde un pago inferior a los jugadores. Por ejemplo, si la secuencia fuese $\{(A, B), (B, A), (A, A)\}$ o bien $\{(B, A), (A, B), (A, A)\}$, no estaríamos ante un equilibrio porque en $t = 2$ cada jugador tendría incentivos para cambiar A por B, sin que el otro jugador tuviese posibilidad de responder en el siguiente periodo a esta desviación (porque tal periodo ya no existe).

[12] En general, para cualquier número par de periodos de un juego $\mathcal{G}^T$.

Las estrategias (detonantes) con las que se consigue la concatenación $\{(A, A), (B, A), (A, B)\}$ son las siguientes:

Para el jugador 1:

- En el primer periodo, $t = 0$, jugar A (esperando que el jugador 2 haga lo mismo).
- Si no ha sido traicionado por el jugador 2 y, por tanto, la historia del juego en $t = 1$ es (A, A), o bien si los dos han traicionado uno al otro y, por tanto, la historia del juego es (B, B), entonces jugar B en $t = 1$ y A en $t = 2$. Por el contrario, si ha sido traicionado por el jugador 2 y, por tanto, la historia del juego en $t = 1$ es (A, B), jugar B para siempre (es decir, tanto en $t = 1$ como en $t = 2$) porque ya no confía en el jugador 2.[13]

Para el jugador 2:

- En $t = 0$, elegir A (esperando que el jugador 1 haga lo mismo).
- Si no ha sido traicionado por el jugador 1 y, por tanto, la historia del juego en $t = 1$ es (A, A), o bien si los dos han traicionado uno al otro y, por tanto, la historia es (B, B), elegir A en $t = 1$ y B en $t = 2$. Si ha sido traicionado por el jugador 1 y, por tanto, la historia del juego en $t = 1$ es (B, A), escoger B para siempre (es decir, tanto en $t = 1$ como en $t = 2$) porque ya no confía en el jugador 1.

En definitiva, cada jugador conoce la estrategia óptima para los dos y sabe que, si se desvía de ella para mejorar su pago a costa del rival (resultado no simétrico), entonces el jugador engañado responderá reajustando su estrategia inicial, siendo peor el pago para cada uno que si respeta la estrategia inicial. Conviene advertir que (A, A) forma parte del equilibrio de $\mathcal{G}^3$, a pesar de que no es EN de $\mathcal{G}$. La idea es que en el juego repetido el EN es un conjunto de estrategias, una para cada repetición del juego, que deja satisfechos a ambos jugadores en la cadena definida por el juego repetido, a pesar de que en una determinada repetición del juego (en un eslabón de la cadena) dicha estrategia colectiva puede no ser EN.

Supongamos ahora que el juego de etapa $\mathcal{G}$ representado en la Tabla 8.4 se repite 50 veces, $\mathcal{G}^{50}$, y que los dos jugadores tienen la oportunidad de jugar la estrategia colectiva (A, A) las primeras 48 veces y, después, alternan la estrategia colectiva (B, A) en la ronda 49 y la estrategia colectiva (A, B) en la ronda 50. Esta concatenación de estrategias es un ENPS y proporciona el vector de pagos promedio $\frac{48\times(4,4)+(5,1)+(1,5)}{50} = \left(\frac{99}{25}, \frac{99}{25}\right)$ a los jugadores, el cual se aproxima mucho al vector de pagos $(4, 4)$. Pues bien, si añadimos este nuevo vector de pagos a los que teníamos inicialmente y que ya hemos representado en la Figura 8.3, obtenemos la Figura 8.4.

[13] El jugador 1 ha de saber que si quien engaña en $t = 0$ es él, el jugador 2 responderá eligiendo B para siempre y, en ese caso, lo mejor para 1 es elegir A.

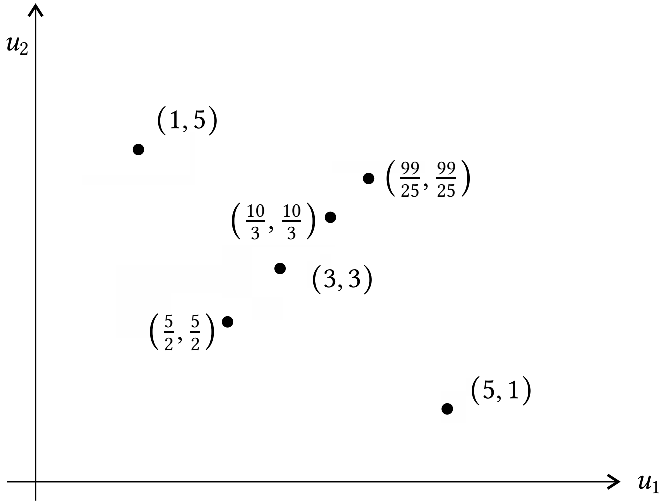

Figura 8.4. Pagos en el juego $\mathcal{G}^{50}$

Que cada jugador elija A periodo tras periodo hasta que solo queden dos rondas en el juego, es decir, que el resultado sea, por ejemplo,

$$\{\underbrace{(A, A), (A, A), \ldots, (A, A)}_{\text{48 primeras veces que se repite el juego}}, (B, A), (A, B)\}$$

es lo mejor para obtener el máximo pago conjunto y el resultado será un ENPS. Este resultado no es casual. De hecho, ya a finales de la década de 1950 existía un resultado sobre esta propiedad de los juegos repetidos y que, debido a que no estaba plasmado en ninguna referencia escrita, pasó a llamarse *teorema folk* o *teorema de tradición oral.* Para enunciarlo, es necesario definir previamente qué se entiende por pago de reserva de un jugador en un juego $\mathcal{G}$.

Definición 8.8. *El pago de reserva (o minimax) de un jugador i en un juego $\mathcal{G}$ en forma normal es el pago máximo que puede obtener suponiendo que los jugadores rivales actúan para minimizar el pago de i.*

El pago de reserva, $\underline{u}_i$, para el jugador i en el juego de etapa es, pues, el pago que el jugador puede asegurarse, periodo tras periodo, con independencia de lo que hagan los otros jugadores.

Definición 8.9. *Un resultado es racionalmente individual para un jugador si le proporciona el pago de reserva.*

Por ejemplo, cualquier jugador en el juego $\mathcal{G}$ representado en la Tabla 8.4 puede garantizarse 1 como pago, simplemente eligiendo A en todas las rondas de $\mathcal{G}^T$ y sin tener en cuenta lo que haga el rival. Por lo tanto, la unión del vector de pagos de re-

Los juegos repetidos en acción 9

9.1. Introducción

La mayor parte de las interacciones que se dan en el mundo real, desde la competencia entre empresas oligopolistas hasta el comportamiento social, pasando por las relaciones comerciales entre países, tienen lugar más de una vez a lo largo del tiempo y, por tanto, se pueden analizar a la luz de los juegos repetidos del Capítulo 8. Por ejemplo, las empresas que compiten una y otra vez en un mercado están desarrollando un juego en el que cada una determina, periodo tras periodo, la cantidad a producir o el precio del producto que fabrica. Es por ello que tiene sentido analizar su comportamiento cuando son conscientes de esta interdependencia a lo largo del tiempo y averiguar si este comportamiento es diferente o no del que exhiben en un contexto estático. En otros casos, el interés reside en analizar cómo ciertas prácticas sociales (convenciones, normas, cooperación, confianza, etc.) se sostienen a pesar de que los jugadores son egoístas y, en el corto plazo, tienden a desviarse de conductas colaborativas. El caso paradigmático es el de las situaciones con estructura del *dilema del prisionero* en las que los jugadores, persiguiendo sus intereses personales, se ven abocados "como por una mano invisible" a un resultado subóptimo para ambos y que, sin embargo, pueden ser resueltas sin necesidad de recurrir a una autoridad centralizada que imponga el resultado óptimo desde el punto de vista agregado.[1]

La forma adecuada de modelar que las empresas compiten dinámicamente en el mercado, adoptando decisiones tanto de corto como de largo plazo, es mediante los juegos multietápicos (de dos etapas) y/o los juegos repetidos. La idea de los juegos de dos etapas es comprender el efecto que una variable de estado —elegida durante la primera etapa— tiene en el proceso de competencia en el mercado de producto, competencia que se desarrolla en una segunda etapa. Un juego de dos etapas paradigmático es el equilibrio de Cournot como resultado de un modelo de Bertrand en el que las empresas tienen restricciones de capacidad (Kreps y Scheinkman, 1983). A su vez, el espíritu de los juegos repetidos es reflejar la competencia dinámica desde una perspectiva distinta de la de los juegos de varias etapas: mientras que en los juegos de varias etapas hay una variable de estado, en los juegos repetidos no hay variable de estado, sino que los jugadores, siempre los mismos, juegan el

[1] El *dilema del prisionero* fue desarrollado en 1950 por Merrill M. Flood y Melvin Dresher de la Rand Corporation para responder al concepto de equilibrio de Nash, y fue el matemático Albert W. Tucker quien, en ese mismo año, y una vez que observó la matriz de pagos, lo revistió con el relato de los prisioneros.

juego de una sola etapa (juego estático o constituyente) una y otra vez a lo largo de un número finito o infinito de periodos.

La ventaja de los juegos repetidos es que superan la simplicidad del análisis estático de Cournot y Bertrand y, por tanto, constituyen el marco idóneo para captar la posibilidad de reacción de las empresas al comportamiento que las rivales hayan tenido en el pasado. No obstante, las predicciones de los juegos repetidos dependen significativamente del horizonte temporal considerado. En particular, un juego como el de Cournot o el de Bertrand repetido un número finito de veces tiene un conjunto de equilibrios que se limita al equilibrio Cournot-Nash (ECN) o el equilibrio Bertrand-Nash (EBN) del respectivo juego (constituyente) de Cournot o Bertrand. De esta forma, el comportamiento de las empresas cuando compiten durante un número finito de periodos es básicamente el mismo que cuando lo hacen durante un solo periodo. Este es el problema del horizonte finito: que el conjunto de equilibrios a que da lugar es demasiado pequeño y solo incluye resultados ineficientes desde el punto de vista colectivo, dado que las empresas son incapaces de conseguir los beneficios de monopolio.

Por el contrario, cuando el juego se repite un número infinito de veces, caemos en el extremo opuesto, y el conjunto de equilibrios contiene muchísimos más equilibrios que el de un juego estático: junto al ECN o EBN (repetidos infinitamente) del juego de etapa, incluye también resultados cooperativos. De hecho, cualquier combinación de beneficios que otorga a cada empresa un beneficio en cada periodo mayor que el correspondiente al ECN o EBN del juego estático puede soportarse como un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) siempre que las empresas sean suficientemente pacientes, es decir, siempre que no descuenten demasiado el futuro. Es más, bajo ciertas condiciones la multiplicidad de equilibrios se amplía hasta el punto de existir ENPS que soportan cualquier beneficio individualmente racional en el juego estático. Para ello, las estrategias de las empresas deben incorporar castigos para las empresas que se desvíen de la pauta conveniente para todas y para las empresas que no sancionen a las que se desvíen, y así sucesivamente. El máximo grado de colusión se alcanzará cuando la sanción sea la más severa posible. De hecho, cuando las empresas fijan precios, los resultados tienden a ser más colusivos que cuando fijan cantidades porque las sanciones conllevan castigos más severos.

Es aquí donde el llamado *teorema folk* adquiere importancia. Este teorema predice que, bajo determinadas condiciones, un juego repetido indefinidamente tiene muchos (infinitos) ENPS, lo cual significa que hay muchas estrategias posibles que definen ENPS. La aplicabilidad y el poder predictivo de la teoría de los juegos repetidos son, pues, escasos al arrojar ambigüedad sobre el reparto final de los beneficios entre los jugadores.

¿Qué podemos hacer frente a la ambigüedad del *teorema folk*? Una posibilidad es utilizar algún criterio para refinar (reducir) el conjunto de ENPS existentes y por ello buena parte de la literatura tiende a desechar los ENPS que están dominados paretianamente en términos de beneficios agregados. Este criterio es, sin embargo, criticable en dos aspectos como mínimo. En primer lugar, no existen funperativo que les permite obtener mayores beneficios que el ECN. Además, lo consiguen de forma no cooperativa, es decir, sin necesidad de firmar acuerdos vinculantes entre sí. Para ello es necesario que valoren suficientemente el futuro; si lo descuentan mucho, la colusión tácita se torna inviable.[15] El horizonte infinito o indefinido de interacción es importante porque asegura que, independientemente del periodo en el que estemos, siempre habrá suficientes periodos en el futuro para que el coste de la sanción por desviarse supere al beneficio que se consigue en un periodo con la desviación en dicho periodo.[16] Este resultado es un ejemplo de otro más general conocido como *teorema folk* y que es el más relevante de la teoría de los juegos repetidos, tal como hemos establecido en el Capítulo 8. En el caso particular de un duopolio, se puede enunciar de la siguiente forma.

Proposición 9.5 (Teorema folk). *En el superjuego $\mathcal{C}^\infty$ jugado por dos empresas, cualquier par de beneficios (π_1, π_2) tales que $\pi_1 \geq \pi_1^C$, $\pi_2 \geq \pi_2^C$ y $\pi_1 + \pi_2 \leq \pi^m$ se puede sostener como pagos de equilibrio en cada periodo siempre que el factor de descuento de las empresas esté próximo a* 1.

Hay que tener en cuenta que π^m es el beneficio máximo que puede obtener cada empresa, dado el beneficio que obtiene la empresa rival, cuando se maximizan los beneficios conjuntos. Esta frontera de posibilidades de beneficios proporciona la misma información que la curva de contrato, pero en el espacio de beneficios y no en el de cantidades. El *teorema folk* se puede ilustrar gráficamente como se hace en la Figura 9.1.

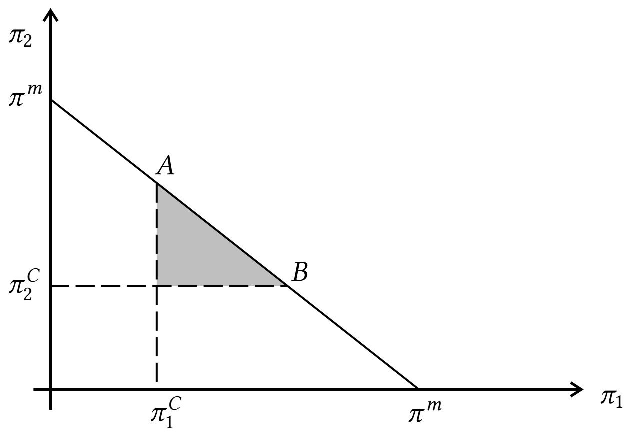

Figura 9.1. Pagos alcanzables mediante colusión tácita con competencia en cantidades

[15] En el límite, cuando $\delta = 0$, a las empresas no les importa nada el futuro y siempre les resulta más rentable desviarse que cooperar.

[16] El factor de descuento δ refleja tanto la tasa de preferencia temporal de mercado, r, como la probabilidad γ de que el juego finalice (en una repetición indefinida), ya que $\delta = (1-\gamma)\frac{1}{1+r}$. Por lo tanto, valores bajos de r y/o γ facilitan la colusión.

Lo que establece el *teorema folk* es que si las empresas descuentan poco el futuro, la probabilidad de que el juego termine es pequeña y cada una tiene incentivo para castigar la traición aunque ella resulte perjudicada al castigar a los rivales, entonces hay muchos equilibrios posibles, es decir, hay muchas estrategias posibles $\{q_{i,t}(h_t), q_{j,t}(h_t)\}$ que dan lugar a ENPS y para las que el pago de cada empresa en cada periodo asociado a la corriente $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_{i,t}(q_{i,t}(h_t), q_{j,t}(h_t))$ es igual a $\pi_{i,t}$. En otras palabras, que si $\delta \to 1$, casi todo[17] es un ENPS si las estrategias de las empresas son *detonantes*.[18]

¿Se limita el conjunto de ENPS alcanzables mediante colusión tácita a los equilibrios que son Pareto superiores al ECN? La respuesta es no y constituye una extensión del *teorema folk*.

Definición 9.3 (Vector de pagos individualmente racional). *Sea u_i el pago minmax de la empresa i en el juego $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{S}, \pi\}$, definido como $u_i = \text{mín}_{s_{-i}} \text{máx}_{s_i} \pi_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$. El vector de pagos $\psi(\boldsymbol{s})$ es individualmente racional si $\psi(\boldsymbol{s}) \geq \boldsymbol{u}$, donde $\psi(\boldsymbol{s}) = (\psi_1(\boldsymbol{s}), \ldots, \psi_i(\boldsymbol{s}), \ldots, \psi_n(\boldsymbol{s}))$ y $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.*

Así pues, en el juego estático, un vector de pagos $\psi(\boldsymbol{s})$ es individualmente racional si cada empresa recibe al menos su pago minmax, es decir, el valor que se puede garantizar para sí misma, independientemente de las estrategias de las empresas rivales. A partir de aquí, llegamos a que el conjunto de resultados que se pueden alcanzar mediante la colusión tácita es mucho más amplio que el conjunto de resultados Pareto superiores al ECN de $\mathcal{C}^{\infty}$ de la Proposición 9.2 (Fudenberg y Maskin, 1986).

Proposición 9.6 (Teorema folk perfecto). *Sea $\mathcal{C}^{\infty}$ un superjuego con descuento y sea x un vector de pagos individualmente racional. Entonces, existe un $\delta^* \in (0,1)$ tal que si $\delta \in (\delta^*, 1)$, $\mathcal{C}^{\infty}$ tiene un ENPS que ofrece precisamente los pagos dados por x.*[19]

Asumiendo que el valor de δ está próximo a 1 y que cualquier vector de pagos individualmente racional rinde beneficios no negativos a las empresas, el conjunto de vectores de pagos sostenibles como ENPS derivado del teorema de Fudenberg y Maskin es mucho mayor que el representado en la Figura 9.1 y se puede ilustrar en la Figura 9.2.

---

[17] En el sentido de que ni el beneficio total puede exceder el de monopolio, ni el beneficio para cada empresa puede ser menor que el de ECN.

[18] Abreu *et al.* (1986) investigan otras estrategias menos severas, como la del *ojo por ojo* y muestran que esta estrategia también sostiene resultados colusivos.

[19] Lo que decimos es que u_i es el peor pago que puede obtener la empresa i (racional y maximizadora de beneficios) en el juego $\mathcal{C}$, y que $\psi_i(\boldsymbol{s})$ es un beneficio para i no inferior a u_i.

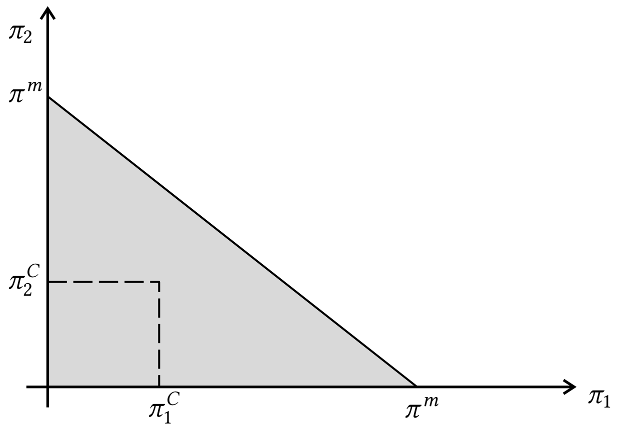

Figura 9.2. Conjunto de pagos sostenibles como ENPS para $\delta \to 1$

En definitiva, el *teorema folk* asegura que si δ está suficientemente próximo a 1, todo[20] es un equilibrio, ya que virtualmente cualquier conjunto de pagos se puede obtener como un ENPS del superjuego $\mathcal{C}^\infty$. A pesar de todo, para valores de δ próximos a 1, la estrategia de castigo para conseguir colusión tácita no tiene por qué ser necesariamente la *detonante irreversible.* Las empresas no tienen por qué amenazar con renunciar para siempre a un beneficio mayor cuando una empresa infringe la pauta colusiva. En su lugar, pueden especificarse, en el conjunto de estrategias de los jugadores, *estrategias detonantes* reversibles (q^m, q^C, T) que prescriben que, tras un número finito T de periodos de castigo a la empresa infractora (produciendo la cantidad de Cournot), las empresas vuelven a su comportamiento colusivo.

Corolario 9.1. *Bajo H1-H5, si $\pi_i(q^m) > \pi_i\left(q^C\right)$ para toda empresa i, entonces existe un $\delta \in (0,1)$ y un T finito, tales que la combinación de estrategias detonantes con reversión finita (q^m, q^C, T) es un ENPS del superjuego $\mathcal{C}^\infty$.*

Demostración El equilibrio requiere que se satisfaga la condición

$$\frac{1-\delta^t}{1-\delta}\pi_i(q^m) + \frac{\delta^t}{1-\delta}\pi_i(q^m) \geq$$

$$\geq \frac{1-\delta^t}{1-\delta}\pi_i(q^m) + \delta^t \pi_i^d(q^m) + \frac{\delta^{t+1}-\delta^{t+T+1}}{1-\delta}\pi_i\left(q^C\right) + \frac{\delta^{t+T+1}}{1-\delta}\pi_i(q^m)$$

---

[20] En el sentido de que ni el beneficio total puede exceder al de monopolio, ni el beneficio para cada empresa puede ser negativo (antes preferiría salir del mercado).

la cual, una vez simplificada, se convierte en

$$\delta \geq \frac{\pi_i^d\left(q^m\right)-\pi_i\left(q^m\right)}{\pi_i^d\left(q^m\right)-\pi_i\left(q^C\right)}+\delta^{T+1}\left(\pi_i\left(q^m\right)-\pi_i\left(q^C\right)\right) \tag{9.8}$$

Para $\delta \in \left(\delta^*, 1\right)$, siendo $\delta^* = \frac{\pi_i^d(q^m)-\pi_i(q^m)}{\pi_i^d(q^m)-\pi_i(q^C)} \in (0,1)$, la desigualdad (9.8) exige que se verifique $\delta - \delta^* \geq \delta^{T+1}\left(\pi_i\left(q^m\right)-\pi_i\left(q^C\right)\right)$, con lo cual

$$\delta^{T+1} \leq \frac{\delta-\delta^*}{\pi_i\left(q^m\right)-\pi_i\left(q^C\right)} \tag{9.9}$$

Esto significa que podemos encontrar una determinada duración del castigo, T, tal que la desigualdad (9.9) se cumpla y la cantidad de monopolio sea ENPS. ■

No solo esto. Otras estrategias como, por ejemplo, producir en cada periodo la cantidad que maximiza el beneficio de las empresas, dada la cantidad producida por las empresas rivales en el periodo anterior, también conducen al resultado colusivo.

■ Ejemplo 1

Consideremos un duopolio en el que las empresas tienen costes marginales nulos, $c = 0$, y enfrentan la demanda de mercado $p(Q) = \text{máx}\{0, 1-Q\}$, donde p es el precio de mercado y $Q = q_1 + q_2$, siendo q_i la cantidad que produce cada empresa i, $i = 1, 2$. Para determinar qué valores del factor de descuento hacen que la cooperación se sostenga como ENPS del juego repetido cuando cada empresa sigue la estrategia *detonante*, escribimos los beneficios de cada una cuando juegan cooperativamente, cuando juegan no cooperativamente y cuando se produce desviación del resultado cooperativo. Dichos beneficios son los reflejados en la Tabla 9.1.

Tabla 9.1. Beneficios de los duopolistas

1 \ 2	$q_2 = \frac{1}{4}$	$q_2 = \frac{1}{3}$	$q_2 = \frac{3}{8}$
$q_1 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}, \frac{5}{36}$	$\frac{3}{32}, \frac{9}{64}$
$q_1 = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{36}, \frac{5}{48}$	$\frac{1}{9}, \frac{1}{9}$	$\frac{7}{72}, \frac{7}{64}$
$q_1 = \frac{3}{8}$	$\frac{9}{64}, \frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}, \frac{7}{62}$	$\frac{3}{32}, \frac{3}{32}$

A partir de la forma normal del juego de la Tabla 9.1, es evidente que si ambas empresas juegan no cooperativamente, el ECN consiste en que cada una produce 1/3. Por otra parte, la colusión (o resultado cooperativo) lleva a que cada una reduzca su producción hasta 1/4. Por último, a cualquier empresa que suponga que

Referencias bibliográficas

Abreu, D., D. Pearce y E. Stacchetti (1986), Optimal cartel equilibria with imperfect monitoring, *Journal of Economic Theory* 39, 251–69.

Aumann, R.J.(1976), Agreeing to disagree, *Annals of Statistics* 4, 1236–1239.

— (1974), Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics* 1, 67–96.

Bamon, R. y J. Fraysee (1985), Existence of Cournot equilibrium in large markets, *Econometrica* 53, 587–97.

Banks, J.S. y Sobel, J. (1987), Equilibrium selection in signaling games, *Econometrica* 55, 647–62.

Basu, K. (1994), The traveler's dilemma: Paradoxes of rationality in game theory, *American Economic Review* 84, 391–95.

Bellhouse, D. (2007), The problem of Waldergrave, *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* 3 (2).

Bernheim, B.D. (1984), Rationalizable strategic behaviour, *Econometrica* 52, 1007–28.

Bernheim, B.D. y M.D. Whinston (1987), Coalition-proof Nash equilibria II. Applications, *Journal of Economic Theory* 42, 13–29.

Bernheim, B.D., B. Peleg y M.D. Whinston (1987), Coalition-proof Nash equilibria I. Concepts, *Journal of Economic Theory* 42, 1–12.

Bertrand, J. (1883), Théorie mathématique de la richesse sociale, *Journal des Savants* 48, 499–508.

Bilbao, J.M. (2000), Introducción a la teoría de juegos no cooperativos, Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla.

Blume, L., A. Brandenburger y D. Dekel (1991), Lexicographic probabilities and equilibrium refinements, *Econometrica* 59, 81–98.

Brander, J. y B. Spencer (1985), Export subsidies and international market share rivalry, *Journal of International Economics* 18, 83–100.

Bulow, J., J. Geanakoplos y P. Klemperer (1985), Multimarket oligopoly: strategic substitutes and strategic complements, *Journal of Political Economy* 93, 488–511.

Chamberlin, E.H. (1933), *The Theory of Monopolistic Competition*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cheng, L. (1985), Comparing Bertrand and Cournot equilibria: A geometric approach, *Rand Journal of Economics* 16, 146–52.

Cho, I.-K. y D.M. Kreps (1987), Signaling games and stable equilibria, *Quarterly Journal of Economics* 102, 179–221.

Clarke, E.H. (1971), Multipart pricing of public goods, *Public Choice* 11, 17–33.

Cournot, A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris: Hachette.

Davidson, C. y R. Deneckere (1986), Long-run competition in capacity, short-run competition in price, and the Cournot model, *Rand Journal of Economics* 17, 404-15.

Dixit, A.K. (1979), A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers, *Bell Journal of Economics* 10, 20–32.

Dixit, A.K. y J. Stiglitz (1977), Monopolistic competition and optimum product diversity, *American Economic Review* 67, 297-308.

Edgeworth, F.Y. (1897), La teoria pura del monopolio, *Giornale degli Economisti* 15, 13-31.

— (1881), *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, Londres: Kegan Paul.

Farrell, J. (1985), Credible neologisms in games of communication, mimeo, MIT.

Friedman, J.W. (1991), *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford: Oxford University Press.

— (1985), Cooperative equilibria in finite horizon non-cooperative supergames, *Journal of Economic Theory* 35, 390–8.

— (1983), *Oligopoly Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

— (1971), A non-cooperative equilibrium for supergames, *Review of Economic Studies* 38, 1–12.

Fudenberg, D. y D.K. Levine (1993), Self-confirming equilibrium, *Econometrica* 61, 523–46.

— (1991), Perfect Bayesian equilibrium and sequential equilibrium, *Journal of Economic Theory* 53, 236-60.

Fudenberg, D. y E. Maskin (1986), The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, *Econometrica* 54, 533–54.

Fudenberg, D. y J. Tirole (1991), Perfect bayesian and sequential equilibrium, *Journal of Economic Theory* 53, 236–60.

— (1984), The fat-cat effect, the puppy-dog ploy, and the lean and hungry look, *American Economic Review* 74, 361–6.

— (1983), Sequential bargaining with incomplete information, *Review of Economic Studies* 50, 221–47.

Grossman, S. y M. Perry (1986), Perfect sequential equilibrium, *Journal of Economic Theory* 39, 97–119.

Groves, T. (1973), Incentives in teams, *Econometrica* 41, 617–31.

Hardin, G. (1968), The Tragedy of the Commons, *Science* 162, 1243-48.

Harper, D.G.C. (1982), Competitive foraging in mallards: "Ideal free" ducks, *Animal Behaviour* 30, 575–84.

Harsanyi, J.C. (1973), Games with randomly distributed payoffs: A new rationale for mixed strategy equilibrium points, *International Journal of Game Theory* 2, 1–23.

— (1967/68), Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Parts I, II and III, *Management Science* 14, 159–182, 320–332, 468–502.

Hotelling, H. (1929), Stability in competition, *Economic Journal* 39, 41–57.

John, K. y J. Williams (1985), Dividends, dilution, and taxes: A signalling equilibrium, *Journal of Finance* 40, 1053–70.

Kalai, E. y D. Samet (1984), Persistent equilibria in strategic games, Discussion Paper #515, Northwestern University.

Kohlberg, E. y J.-F. Mertens (1986), On the strategic stability of equilibria, *Econometrica* 54, 1003–37.

Kreps, D.M. y R. Wilson (1982), Sequential equilibria, *Econometrica* 50, 863–94.

Kreps, D.M. y J. Scheinkman (1983), Quantity pre-commitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes, *Bell Journal of Economics* 14, 326–37.

Kreps, D.M., P. Milgrom, J. Roberts y R. Wilson (1982), Rational cooperation in the finitely repeated prisoners' dilemma, *Journal of Economic Theory* 27, 245–52.

Kuhn, H.W. (1953), Extensive games and the problem of information, *Annals of Mathematical Study* 28, 193–216.

Kydland, F.E. y E.C. Prescott (1977), Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans, *Journal of Political Economy* 85, 473–92.

Lancaster, K. (1971), *Consumer Demand: A New Approach*, New York: Columbia University Press.

Luce, R.D. y H. Raiffa (1957), *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*, New York: Wiley.

Milgrom, P. (1981), An axiomatic characterization of common knowledge, *Econometrica* 49, 1173–99.

Milgrom, P. y J. Roberts (1982), Limit-pricing and entry under incomplete information: An equilibrium analysis, *Econometrica* 50, 443–60.

Myerson, R.B. (1999), Nash equilibrium and the history of economic theory, *Journal of Economic Literature* 37, 1067–82.

— (1978), Refinements of the Nash equilibrium concept, *International Journal of Game Theory* 7, 73–80.

Nash, J.F. (1951), Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* 51, 286–95.

— (1950), Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Science* 36, 48–49.

Novshek, W. (1985), On the existence of Cournot equilibrium, *Review of Economic Studies* 52, 85–98.

Palfrey, T. (1992), Implementation in Bayesian equilibrium: The multiple equilibrium problem in mechanism design. En Laffont, J.-J. (comp.), *Advances in Economic Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

Pearce, D. (1984), Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection, *Econometrica* 52, 1029–50.

Riley, J.G. (2001), Silver signals: Twenty-five years of screening and signaling, *Journal of Economic Literature* 39, 432–78.

Robinson, J. (1933), *The Economics of Imperfect Competition*, London: Mcmillan.

Rubinstein, A. (1982), Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica* 50, 97–109.

Selten, R. (1978), The chainstore paradox, *Theory and Decision* 9, 127–59.

— (1975), Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory* 4, 25–55.

— (1965), Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragentragheit, *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft* 12, 201–324.

Shapiro, C. (1989), Theories of oligopoly behaviour. En Schmalensee R. y R. Willig (eds.), *Handbook of Industrial Organization*, Amsterdam: Elsevier.

Singh, N. y X. Vives (1984), Price and quantity competition in a differentiated duopoly, *Rand Journal of Economics* 15, 546–54.

Spence, M. (1976), Product differentiation and welfare, *American Economic Review* 66, 407–14.

— (1973), Job market signaling, *Quarterly Journal of Economics* 87, 355–79.

Stackelberg, H. von (1934), *Marktform und Gleichgewicht (Market Structure and Equilibrium)*, Viena: J. Springer.

Stahl, I. (1972), *Bargaining Theory*, Estocolmo: The Economic Research Institute.

Symeonidis, G. (2003), Comparing Cournot and Bertrand equilibria in a differentiated duopoly with product R&D, *International Journal of Industrial Organization* 21, 39–55.

Szidarovszky, F. y S. Yakowitz (1977), A new proof of the existence and uniqueness of the Cournot equilibrium, *International Economic Review* 18, 787–9.

Tirole, J. (2017), *La Economía del Bien Común*, Madrid: Taurus.

van Damme, E. (1983), *Refinements of the Nash Equilibrium Concept*, Berlín: Springer Verlag.

von Neumann, J. (1928), Zur Theorie der Gesellschaftsspiele (On the theory of games of strategy), *Mattematische Annalen* 100, 295–320.

von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, New York: Wiley.

Wen-Tsun, W. y J. Jia-He (1982), Essential equilibrium points of n-person non-cooperative game, *Science Sinica* 11, 1307–22.

Zermelo, E. (1913), Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf der Theorie des Schachspiels (On an application of set theory to the theory of the game of chess), *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics*, 501–4.

Índice analítico