fundamentos de mecánica

Carlos F. González Fernández
Catedrático de Física Aplicada
Universidad Politécnica de Cartagena

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Registro bibliográfico (ISBD)

González Fernández, Carlos F.

Fundamentos de mecánica / Carlos F. González Fernández. – Barcelona : Reverté, 2009
X, 313 p. : il. ; 24 cm.
Índice.
DL B-32570-2009. – ISBN 978-84-291-4358-4

1. Mecánica general. 2. Mecánica de los cuerpos sólidos y rígidos. I. Título.
531

ISBN: 978-84-291-4358-4

MAQUETACIÓN: REVERTÉ-AGUILAR, S. L.

CRÉDITOS DE LAS ILUSTRACIONES:
Figuras 1.2, 4.23, 4.28, 5.10, 5.13, 6.9 y 7.28: fotografías y dibujos de la NASA. Figura 3.6: fotografía de la US Nacional Oceanic and Atmospheric Administration. Figuras 4.30, 6.16 y 7.51: fotografías de Carlos F. González Fernández.

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

www.reverte.com

Impreso en España - *Printed in Spain*

Depósito legal: B-32570-2009

Impresión y encuadernación: Liberdúplex, S.L.U.

ESTE LIBRO HA SIDO PUBLICADO CON LA COLABORACIÓN DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

PRÓLOGO

Este libro es un texto de mecánica que puede integrarse en los cursos de física de primer año de universidad en las titulaciones de las Facultades de Ciencias y de las Escuelas de Ingeniería, o bien utilizarse de modo independiente. Al ser éste el primer contacto —a nivel universitario— del estudiante con la mecánica era necesario limitar su contenido, tanto en la selección de temas como en su extensión y profundidad. No obstante, se ha pretendido que sea completo en lo fundamental, claro y riguroso, evitando aquellos aspectos que necesitan de un desarrollo más propio de un curso avanzado de mecánica.

El objetivo fundamental del libro es buscar la comprensión por parte del estudiante de la materia que se expone, organizando y presentando el texto de modo que facilite su aprendizaje, dando énfasis a los conceptos en el marco del instrumento analítico necesario y adecuado a este nivel de formación, presentando los tópicos en el contexto que mejor justifica su estudio y favorece su entendimiento, incluyendo en cada capítulo problemas tipo resueltos con detalle, intentando mostrar una mecánica accesible, cercana, cotidiana en muchos casos, y abordando cuestiones que podrían ser tratadas como "complementarias" (y, por tanto, con demasiada frecuencia obviadas) que se integran en el texto como aplicación o como aspecto a señalar, añadiendo así una faceta más al tópico de referencia.

Las siete lecciones en las que se ha organizado la materia responden básicamente a una idea temática, evitando así separaciones a veces forzadas; de ahí su distinta extensión. En ellas se puede hacer diversas elecciones de contenidos para su mejor adaptación a programas concretos.

AL ESTUDIANTE

La física está continuamente presente en nuestras vidas de manera directa o indirecta. Hay física en la televisión y en el ordenador, en la placa de inducción y en el microondas, en el frigorífico y en la bomba de calor; hay física en la lavadora, en las naves y aeronaves, en los sofisticados aparatos de diagnóstico médico, en los teléfonos móviles y en las consolas de juegos, en los satélites artificiales y en las sondas espaciales, en la música y en los deportes… Hay física en el origen del universo y en su evolución, en la formación de estrellas y galaxias, en el púlsar y en el quásar, en las corrientes marinas y en la circulación atmosférica…

La física, y en concreto la mecánica, explica por qué es difícil andar sobre el hielo, cuál es la velocidad adecuada que debe llevar un automóvil para no salirse de una curva, por qué nuestra atmósfera contiene nitrógeno y oxígeno pero no hidrógeno, qué hacer para evitar el vuelco de una grúa, cómo es que no salimos despedidos al espacio a pesar de la rotación terrestre, por qué los astronautas flotan en las naves espaciales, cuál es la causa de las mareas y de que la Luna siempre nos presente la misma cara, por qué las peonzas giran en torno a la vertical más rápidamente antes de caer, la razón de que al competir en carrera los pilotos tomen las curvas con sus motos inclinándose hasta casi rozar su rodilla con el asfalto…

Ambas relaciones son interminables.

Para comprender es preciso avanzar sobre bases sólidas.

Adelante.

Índice analítico

PRÓLOGO . . . . **V**

AL ESTUDIANTE VI

Capítulo 1 MAGNITUDES FÍSICAS **1**

1.1 Análisis dimensional 2

I. Unidades y medidas 2

II. Fórmula dimensional 3

1.2 Sistema Internacional de Unidades 10

I. Unidades SI básicas 11

II. Unidades SI derivadas 14

III. Múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades SI 16

1.3 Magnitudes escalares y vectoriales 17

1. Escalares y vectores 17

2. Suma de vectores 20

3. Producto de escalares y vectores 21

4. Producto escalar 21

5. Producto vectorial 22

6. Derivada e integral de un vector 27

7. Homogeneidad vectorial 28

Capítulo 2 CINEMÁTICA 31

2.1 Posición 32

2.2 Velocidad 34

2.3 Aceleración 39

2.4 Movimientos con aceleración constante 43

I. Caso general 43
II. Movimiento bajo la acción de la gravedad 44
III. Movimiento circular uniformemente acelerado 48

2.5 Movimientos periódico y vibratorio armónico 50

I. Movimiento periódico 50
II. Movimiento vibratorio armónico (m.v.a.) 50
III. Composición de movimientos vibratorio armónicos 53

2.6 Movimientos de traslación y de rotación 59

I. Movimiento de traslación 59
II. Movimiento de rotación 62
III. Movimiento de traslación y rotación 63

Capítulo 3 DINÁMICA. LEYES DE NEWTON 65

3.1 Primera ley de Newton 66

3.2 Segunda ley de Newton 67

3.3 Tercera ley de Newton 69

3.4 Fuerza gravitatoria 71

3.5 Campo gravitatorio 77

I. Concepto de campo 77
II. Líneas de campo 80
III. Teorema de Gauss 81

3.6 Fuerza central. Momento cinético 87

3.7 Equilibrio y estabilidad 92

3.8 Fuerza recuperadora lineal en el movimiento oscilatorio 96

I. Fuerza recuperadora lineal 96
II. Ecuación del movimiento 99

3.9 Fuerza de rozamiento entre sólidos 101

I. Presión 101
II. Rozamiento en el deslizamiento 102
III. Rozamiento en la rodadura 107

Capítulo 4 MOVIMIENTO RELATIVO. FUERZAS DE INERCIA 117

4.1 Transformación de Galileo 118

4.2 Cinemática relativista 122

4.3 Sistemas no inerciales. Fuerzas de inercia en el movimiento rectilíneo 129

4.4 Fuerzas de inercia en el movimiento curvilíneo 135

I. Fuerza centrífuga 135
II. Fuerza de Coriolis 139

4.5 Rotación terrestre y aceleración de la gravedad 146

Capítulo 5 TRABAJO Y ENERGÍA 153

5.1 Trabajo y energía cinética 154

I. Trabajo 154
II. Energía cinética 156
III. Trabajo y potencia 158

5.2 Energía potencial 160

I. Fuerza conservativa 160
II. La energía potencial como campo escalar. Gradiente 160

5.3 Conservación de la energía 163

5.4 Energía potencial gravitatoria 166

I. En las proximidades de la superficie terrestre 166
II. Caso general 168

5.5 Energía potencial del oscilador lineal 173

5.6 Curvas de energía potencial 176

5.7 Energía relativista 186

Capítulo 6 DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS 193

6.1 Centro de masas.. 194

6.2 Ecuación dinámica y conservación del momento lineal 203

6.3 Choques entre partículas 209

I. Impulso 209
II. Choques 210

6.4 Masa variable 219

6.5 Ecuación dinámica y conservación del momento angular 224

I. Teorema de König del momento angular 224
II. Momento-fuerza neto 225
III. Ecuación del momento angular 227

Capítulo 7 DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO 231

7.1 Movimiento general del cuerpo rígido 232

7.2 Sistemas equivalentes de fuerzas. Reducción 234

Equivalencia 234
Reducción 237
I. Caso general 237
II. Par de fuerzas 238
III. Fuerzas convergentes 240
IV. Fuerzas paralelas 241

7.3 Equilibrio del sólido rígido 244

7.4 Movimiento plano. Rotación alrededor de un eje fijo 254

I. Características del movimiento plano. 254
II. Rotación alrededor de un eje fijo 255

7.5 Movimiento plano de roto-traslación 265

I. Movimiento de rodadura 266
II. Movimiento de deslizamiento 268

7.6 Energía cinética 271

I. Energía cinética de un sistema de partículas 271
II. Energía cinética del sólido rígido 273

7.7 Trabajo 278

I. Sistema de partículas 278
II. Sólido rígido 279

7.8 Determinación de momentos de inercia 287

I. Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados 287
II. Aditividad 288
III. Teorema de los ejes perpendiculares 288
IV. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos 289

7.9 Rotación en el espacio 295

I. Centro de masas fijo 296
II. Eje de rotación con un punto fijo 297

ÍNDICE ALFABÉTICO 305

Capítulo 1

MAGNITUDES FÍSICAS

1.1	Análisis dimensional	2
1.2	Sistema Internacional de Unidades	10
1.3	Magnitudes escalares y vectoriales	17

1.1 Análisis dimensional

I. UNIDADES Y MEDIDAS

La **física** trata de obtener las leyes que rigen el comportamiento del universo mediante el estudio de los componentes de la materia y de sus interacciones. Para conseguirlo se proponen modelos, que son construcciones mentales capaces de explicar cómo se producen los fenómenos en la realidad. Habitualmente los modelos son el resultado de un largo proceso conocido como *método científico* que implica observación —de los objetos o fenómenos en estudio—, experimentación, formulación del modelo teórico y su comprobación experimental.

En la elaboración de los modelos la física utiliza una serie de conceptos que se designan como **magnitudes**, que tratan de expresar características o propiedades de los cuerpos o de los fenómenos, como la masa, la longitud, el tiempo, etc., cuya manifestación particular en cada caso concreto se designa como **cantidad**; así, la masa de una bola de billar es la cantidad de masa que contiene, y el tiempo de la rotación terrestre es la cantidad de tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma.

Las leyes físicas establecen relaciones entre cantidades de distintas magnitudes. Si representamos entre paréntesis las distintas cantidades, la segunda ley de Newton, por ejemplo, se puede escribir como una relación de proporcionalidad,

$$(f) \sim (m)(a) \tag{1.1}$$

es decir, la fuerza aplicada a un cierto cuerpo le origina una aceleración directamente proporcional a dicha fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo; así, aplicando una misma fuerza, si se duplica la masa la aceleración se reducirá a la mitad. Pero, ¿cómo se sabe cuándo se tiene una masa doble o una aceleración mitad que otra? Para ello es preciso medir; medir es comparar una cantidad con otra —de la misma magnitud— que se toma como referencia; a esta cantidad se la designa como *unidad*, y el número de veces que aquella contiene a la unidad es la *medida*.

> ***Unidad*** *de una magnitud es una cantidad de la misma, elegida arbitrariamente, con la que se comparan las restantes cantidades de la misma magnitud.*

Por ejemplo, si U_m es una unidad elegida de masa, la cantidad de masa (m) puede expresarse como

$$(m) = nU_m \tag{1.2}$$

siendo n la medida de (m) con relación a la unidad U_m.

> ***Medida*** *es un número que indica cuántas veces una cantidad dada contiene a la unidad elegida.*

Si se elige otra unidad, U'_m , para medir la misma cantidad de masa resulta

$$(m) = n'U'_m \tag{1.3}$$

con n' la nueva medida, y dividiendo (1.2) y (1.3), se obtiene

$$\frac{n}{n'} = \frac{U'_m}{U_m} \tag{1.4}$$

es decir,

> *los cocientes de las medidas de una misma cantidad y de las unidades utilizadas están en razón inversa.*

Como se ha dicho, para la experimentación es preciso cuantificar las cantidades, y por ello las relaciones teóricas, en vez de relaciones de proporcionalidad entre cantidades, se expresan en forma de ecuaciones —igualdades— en las que los símbolos que en ellas figuran corresponden a las medidas de las distintas cantidades que intervienen en cada caso concreto. De este modo, la segunda ley de Newton, en vez de (1.1) se expresa como

$$f = ma$$

siendo f, m y a las medidas de fuerza, masa y aceleración.

> *Las ecuaciones físicas relacionan medidas de las cantidades que en ellas intervienen.*

Si las relaciones físicas se establecen entre medidas, es necesario definir un sistema de unidades de las distintas magnitudes físicas; unas se definen independientemente de las restantes, son las **unidades básicas** del sistema (como las unidades de masa, tiempo y longitud en mecánica), mientras que otras se definen a partir de su relación con las primeras o entre ellas, son las **unidades derivadas** (como las unidades de velocidad, aceleración o cantidad de movimiento, pues, por definición, la velocidad es el cociente entre longitud y tiempo; la aceleración es el cociente entre velocidad y tiempo, y la cantidad de movimiento es el producto de masa y velocidad).

II. FÓRMULA DIMENSIONAL

La elección de la unidad de una cierta magnitud es, en principio, arbitraria; si se cambia la unidad, cambiará la medida de la cantidad que en concreto se considere. ¿En cuánto? Si se trata de unidades definidas independientemente, esto es, básicas, teniendo en cuenta (1.4), la relación

$$\boxed{\frac{n}{n'} = \frac{U'}{U}} \tag{1.5}$$

proporciona directamente la nueva medida. ¿Y si se trata de unidades definidas mediante otras, es decir, de unidades derivadas? Por ejemplo, ¿cómo cambia la medida de una velocidad dada (v) si se cambian las unidades de longitud y tiempo? Sea v su medida utilizando un sistema de unidades $\{U_\ell, U_t, ...\}$, con U_ℓ y U_t las unidades de longitud y tiempo, respectivamente; nos preguntamos cuál será la medida, v', de la misma velocidad si se utiliza otro sistema de unidades $\{U'_\ell, U'_t, ...\}$ siendo U'_ℓ y U'_t las nuevas unidades de longitud y tiempo, respectivamente. Según (1.5)

$$\frac{v}{v'} = \frac{U'_v}{U_v}$$

Y como las unidades de velocidad son derivadas y vienen dadas por

$$U_v = \frac{U_\ell}{U_t} \qquad \text{y} \qquad U'_v = \frac{U'_\ell}{U'_t}$$

sustituyendo, se tiene

$$\frac{v}{v'} = \frac{U'_v}{U_v} = \left(\frac{U'_\ell}{U_\ell}\right)\left(\frac{U'_t}{U_t}\right)^{-1} \tag{1.6}$$

expresión en la que todo es conocido excepto el valor v' que se quería obtener, pudiendo así responder a la pregunta planteada. La expresión (1.6) informa de cómo cambia la medida de la velocidad —y, también, qué relación guarda la nueva unidad U'_v con la primitiva U_v— si se cambian las unidades de longitud y tiempo.

De hecho, se puede responder a las mismas preguntas para cualquier magnitud mecánica si se conocen las unidades de masa, longitud y tiempo en los dos sistemas, $\{U_m, U_\ell, U_t\}$ y $\{U'_m, U'_\ell, U'_t\}$; si se amplía para todos los campos de la física, hay que añadir las unidades de temperatura, θ, y de carga eléctrica, q (o de la intensidad de corriente eléctrica). En definitiva, para cualquier magnitud, x, la relación entre las medidas de una misma cantidad y, también, entre las unidades de dicha magnitud en dos sistemas de unidades diferentes viene dada por

$$\boxed{\frac{x}{x'} = \frac{U'_x}{U_x} = \left(\frac{U'_m}{U_m}\right)^{\alpha_m}\left(\frac{U'_\ell}{U_\ell}\right)^{\alpha_\ell}\left(\frac{U'_t}{U_t}\right)^{\alpha_t}\left(\frac{U'_\theta}{U_\theta}\right)^{\alpha_\theta}\left(\frac{U'_q}{U_q}\right)^{\alpha_q}} \tag{1.7}$$

que es la **fórmula dimensional** de la magnitud x, siendo α_m, α_ℓ, α_t, α_θ, α_q, sus exponentes dimensionales.

*La **fórmula dimensional** de una magnitud proporciona la dependencia de la medida de la cantidad y de la unidad de la misma con el sistema de unidades utilizado.*

a) *Corchetes*
Para abreviar, se utiliza la notación con corchetes:[1]

$$[x] \equiv \frac{x}{x'} = \frac{U'_x}{U_x}$$

Y de este modo, la ecuación (1.7) se expresa como

$$[x] = [m]^{\alpha_m} [\ell]^{\alpha_\ell} [t]^{\alpha_t} [\theta]^{\alpha_\theta} [q]^{\alpha_q} \tag{1.8}$$

Los corchetes de las magnitudes masa, longitud, tiempo, temperatura y carga eléctrica se representan con letras mayúsculas

$$[x] \equiv \mathrm{M}, \qquad [\ell] \equiv \mathrm{L}, \qquad [t] \equiv \mathrm{T}, \qquad [\theta] \equiv \theta, \qquad [q] \equiv \mathrm{Q}$$

con lo que (1.8) toma la forma

$$\boxed{[x] = \mathrm{M}^{\alpha_m} \mathrm{L}^{\alpha_\ell} \mathrm{T}^{\alpha_t} \theta^{\alpha_\theta} \mathrm{Q}^{\alpha_q}} \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.1

Determine la relación que existe entre la unidad de fuerza en el Sistema Internacional (newton) y en el sistema CGS (dina).

Las unidades de masa, longitud y tiempo en ambos sistemas son: SI{kg, m, s}, CGS{g, cm, s}. Calculemos la fórmula dimensional de la fuerza utilizando la segunda ley de Newton $f = ma$. Así,

$$[f] = [m]\ [a] = [m]\frac{[v]}{[t]} = \mathrm{MLT}^{-2}$$

por lo que

$$[f] = \frac{U'_f}{U_f} = \left(\frac{U'_m}{U_m}\right)\left(\frac{U'_\ell}{U_\ell}\right)\left(\frac{U'_t}{U_t}\right)^{-2}$$

Sustituyendo las unidades,

$$\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}} = \left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{kg}}\right)\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}}\right)^{-2} = \left(\frac{\mathrm{g}}{10^3\mathrm{g}}\right)\left(\frac{\mathrm{cm}}{10^2\mathrm{cm}}\right) = 10^{-3} \times 10^{-2} = 10^{-5}$$

Esto es,

$$1\mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}$$

---

1. En el texto, el símbolo ≡ se utiliza para significar *designación*, *identidad o definición*.

c) *Homogeneidad dimensional*

Como ya se ha dicho, las ecuaciones físicas se establecen entre medidas, y las medidas cambian dependiendo del sistema de unidades que se utilice; pero dichas ecuaciones deben ser generales, no pueden cambiar con el cambio de unidades, deben ser independientes del sistema de unidades utilizado. La exigencia de que las leyes físicas se satisfagan cualquiera que sea el sistema de unidades que se emplee, es decir, que sean invariantes a los cambios de sistemas de unidades, también supone su homogeneidad dimensional.

> *La homogeneidad dimensional de una ecuación física implica que todos los términos de la misma tengan la misma fórmula dimensional.*

Si no fuera así —de acuerdo con la información que suministra (1.7)— cada término de la ecuación se transformaría en distinta cuantía al cambiar de sistema de unidades y el valor de los miembros de la igualdad ya no coincidirían, deshaciéndose ésta. Por ejemplo, si en una igualdad el exponente dimensional α_m es nulo en el primer miembro y no nulo en el segundo, un cambio en la unidad de masa determina una alteración del segundo pero no del primer miembro, y no se mantiene la igualdad con el nuevo sistema de unidades.

La exigencia de homogeneidad dimensional permite, en algunos casos, obtener la relación física que liga determinadas magnitudes asociadas a un cierto fenómeno. Así, por ejemplo, si se sabe o se supone —con base empírica o justificación teórica— que una cierta magnitud p depende o puede depender de las magnitudes x, y, z independientes entre sí,

$$p = f(x, y, z)$$

se puede buscar una relación monomia entre ellas —en la que pueden intervenir constantes— como

$$p = kx^a y^b z^c$$

siendo k un número indeterminado. El problema es determinar los exponentes a, b, c, alguno de los cuales podría ser nulo. Como ambos miembros de la ecuación deben tener la misma fórmula dimensional para que sea dimensionalmente homogénea

$$[p] = [x^a y^b z^c] \tag{1.11}$$

el procedimiento consiste, en primer lugar, en expresar la fórmula dimensional de las magnitudes y constantes. Si el problema pertenece al ámbito de la mecánica, serán de la forma

$$\begin{aligned}
[p] &= \mathrm{M}^{\alpha_{mp}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell p}} \mathrm{T}^{\alpha_{tp}} \\
[x] &= \mathrm{M}^{\alpha_{mx}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell x}} \mathrm{T}^{\alpha_{tx}} \\
[y] &= \mathrm{M}^{\alpha_{my}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell y}} \mathrm{T}^{\alpha_{ty}} \\
[z] &= \mathrm{M}^{\alpha_{mz}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell z}} \mathrm{T}^{\alpha_{tz}}
\end{aligned}$$

y, en segundo lugar, sustituir dichas expresiones en (1.11), de modo que

$$\mathrm{M}^{\alpha_{mp}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell p}} \mathrm{T}^{\alpha_{tp}} = (\mathrm{M}^{\alpha_{mx}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell x}} \mathrm{T}^{\alpha_{tx}})^a (\mathrm{M}^{\alpha_{my}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell y}} \mathrm{T}^{\alpha_{ty}})^b (\mathrm{M}^{\alpha_{mz}} \mathrm{L}^{\alpha_{\ell z}} \mathrm{T}^{\alpha_{tz}})^c$$

Igualando los exponentes se obtienen las ecuaciones:

$$\alpha_{mp} = a\alpha_{mx} + b\alpha_{my} + c\alpha_{mz}$$
$$\alpha_{\ell p} = a\alpha_{\ell x} + b\alpha_{\ell y} + c\alpha_{\ell z}$$
$$\alpha_{tp} = a\alpha_{tx} + b\alpha_{ty} + c\alpha_{tz}$$

que permiten obtener los exponentes *a, b, c*.

Ejemplo 1.3

Analice si, desde el punto de vista dimensional, la expresión $T = 2\pi(g/l)^{1/2}$ puede corresponder al período (T) de un péndulo simple de longitud l, siendo g la aceleración de la gravedad.

La fórmula dimensional de las magnitudes T, g y l son:

$$[T] = \mathrm{T} \qquad [g] = \frac{[v]}{[t]} = \mathrm{LT}^{-2} \qquad [l] = \mathrm{L}$$

Por otra parte, 2π es un número, por lo que su fórmula dimensional es

$$[2\pi] = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0 = 1$$

En consecuencia, la fórmula dimensional del primer miembro de la ecuación es T, siendo la del segundo

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = \sqrt{\frac{[g]}{[l]}} = \sqrt{\frac{\mathrm{LT}^{-2}}{\mathrm{L}}} = \mathrm{T}^{-1}$$

Por lo que la ecuación *no es dimensionalmente homogénea*, y no es posible.

Ejemplo 1.4

Determínese la relación entre la fuerza centrípeta que actúa sobre una partícula que describe una circunferencia con el radio de la trayectoria, la velocidad angular del movimiento y la masa de la partícula.

Se trata de determinar una relación

$$f_c = f_c(r, \omega, m)$$

que en forma explícita escribiremos

$$f_c = kr^{a}\omega^{b}m^{c}$$

con k un número indeterminado. Obtengamos la fórmula dimensional de cada una de las magnitudes que intervienen en el problema,

$$[f_c] = [m]\ [a] = \mathrm{MLT}^{-2} \qquad [r] = \mathrm{L} \qquad [\omega] = \mathrm{T}^{-1} \qquad [m] = \mathrm{M}$$

y sustituyamos en la ecuación anterior,

$$MLT^{-2} = (L)^a (T^{-1})^b (M)^c$$

Igualando los exponentes de M, L y T, se obtienen las ecuaciones

$$1 = c \qquad 1 = a \qquad -2 = -b$$

de modo que la relación buscada es

$$f_c = kr\omega^2 m$$

d) *Cambio de escala*

La semejanza geométrica entre dos sistemas materiales (su igualdad de forma) al obtener uno del otro multiplicando todas sus longitudes por un factor de escala λ, no implica semejanza física (igualdad de comportamiento estático o dinámico, es decir, igualdad en la relación de fuerzas en uno y otro sistema). Consideremos, por ejemplo, un péndulo constituido por una bola esférica de radio R suspendida de un cordel de longitud l y sección circular de radio r (Figura 1.1). Si se construye un péndulo mayor cuyas dimensiones se han multiplicado por diez, la longitud del cordel será $10l$, el radio de su sección $10r$ y el radio de la bola, $10R$. Se puede estimar la relación entre la carga (el peso de la bola) que tiene que soportar el cordel respecto a la resistencia de éste (peso que puede soportar sin romperse) teniendo en cuenta que el peso es proporcional a su masa, ésta a su volumen y el volumen al cubo del radio de la esfera, mientras que la resistencia es proporcional al área de la sección del cordel, y ésta lo es al cuadrado de su radio (relación aplicable a cuerdas y vigas, músculos y huesos). Por tanto, el cociente de ambas fuerzas para el péndulo pequeño es,

$$\left(\frac{\text{peso}}{\text{resistencia}}\right)_{\text{p. pequeño}} \sim \frac{m}{s} \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2} \sim \frac{R^3}{r^2}$$

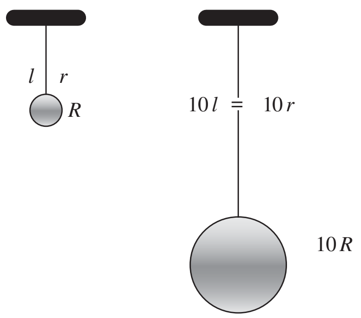


Figura 1.1

I. UNIDADES SI BÁSICAS

Unidades SI básicas		
Magnitud	*Nombre*	*Símbolo*
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica (*)	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

(*) La temperatura Celsius se expresa en grados Celsius (símbolo °C).

A) Longitud

a) *Definición de la unidad SI*

El metro es la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

b) *Algunos valores (en metros)*

10^{26}	límite del universo observable	
10^{22}	distancia de la galaxia más cercana (Andrómeda)	
10^{21}	diámetro de nuestra galaxia	
10^{16}	*año luz* ($9{,}46 \times 10^{15}$)	
10^{13}	diámetro del sistema solar	
10^{11}	*unidad astronómica* ($1\text{UA} \cong 1{,}50 \times 10^{11}$ m, distancia media entre los centros Sol-Tierra)	
10^{9}	radio del Sol ($6{,}96 \times 10^{8}$)	
10^{8}	distancia media entre los centros Tierra-Luna ($3{,}84 \times 10^{8}$), radio de Júpiter ($7{,}13 \times 10^{7}$)	
10^{7}	radio medio terrestre ($6{,}37 \times 10^{6}$)	
10^{6}	radio de la Luna ($1{,}74 \times 10^{6}$)	
10^{4}	punto más profundo de los océanos	
10^{3}	montañas más altas	
10^{0}	hombre	
10^{-4}	células vegetales	
10^{-5}	células animales	
10^{-6}	bacterias	
10^{-7}	virus	
10^{-8}		NANOCIENCIA Y NANOTECNOLOGÍA
10^{-9}		
10^{-10}	átomo de hidrógeno	
10^{-15}	protón	
10^{-18}	electrón	

La Figura 1.2 da idea del tamaño relativo del Sol y sus planetas

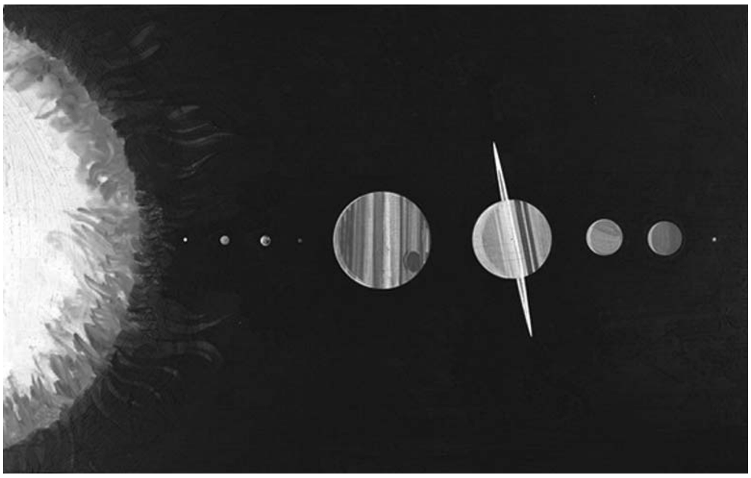


Figura 1.2

c) *Nanociencia y nanotecnología*

La nanociencia y nanotecnología es el estudio y manipulación de la materia a escala molecular y atómica, tratando la molécula y el átomo como entidades sobre las que se puede actuar individualmente. Tal posibilidad genera un enorme potencial de evolución en campos tan diversos como la fabricación de nuevos materiales, tecnologías de la información, medicina o medioambiente, entre otros, y constituye uno de los más ambiciosos e innovadores desarrollos científicos actuales.

Para dar una ligera idea de lo que puede representar la posibilidad de manipular individualmente los átomos, piénsese que las propiedades de los materiales no sólo dependen del tipo de átomos y moléculas que los constituyen, sino de su ubicación. Así, por ejemplo, con los átomos de carbono que constituyen la mina de un lápiz (grafito) se podría obtener diamante si se reubicasen adecuadamente. En el grafito los átomos de carbono forman capas muy estables, fuertes y flexibles que se disponen unas sobre otras y se unen entre sí muy débilmente, por lo que se desprenden con facilidad (como al escribir con el lapicero). La unión de capas de átomos de carbono mucho mayores que las del grafito, unas a continuación de otras, forma una estructura larga, fuerte y ligera que tiene una gran variedad de usos tecnológicos: la fibra de carbono. Pues bien, si una capa de carbono se enrolla para formar un tubo, se obtiene un nanotubo de carbono que tiene unos nanometros de diámetro, pudiendo obtenerse de hasta un milímetro de longitud uniendo unos con otros. Las fibras obtenidas con nanotubos son más ligeras que el aluminio y, sin embargo, tienen una resistencia a la tracción más de 20 veces superior a la del acero, son sumamente elásticas y tienen propiedades eléctricas, térmicas y estructurales que dependen de su diámetro, longitud y del modo en que se enrolla la capa.

B) Masa

a) *Definición de la unidad SI*

El kilogramo es igual a la masa del prototipo internacional de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

b) *Algunos valores (en kilogramos)*

10^{30}	masa del Sol ($1{,}99 \times 10^{30}$)
10^{27}	masa de Júpiter ($1{,}90 \times 10^{27}$)
10^{25}	masa de la Tierra ($5{,}97 \times 10^{24}$)
10^{23}	masa de la Luna ($7{,}35 \times 10^{22}$)
10^{2}	hombre
10^{-3}	gota de lluvia
10^{-5}	mosquito
10^{-13}	mota de polvo
10^{-15}	bacteria
10^{-27}	protón ($1{,}672 \times 10^{-27}$)
10^{-30}	electrón ($9{,}109 \times 10^{-31}$)

C) Tiempo

a) *Definición de la unidad SI*

El segundo es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

b) *Algunos valores (en segundos)*

10^{17}	edad del universo
10^{16}	período orbital del Sol alrededor del centro galáctico
10^{15}	extinción de los dinosaurios
10^{9}	*siglo* ($3{,}15 \times 10^{9}$)
10^{7}	*año* ($3{,}15 \times 10^{7}$)
10^{6}	período de rotación de la Luna
10^{5}	período de rotación de la Tierra ($8{,}62 \times 10^{4}$)
10^{2}	viaje de la luz del Sol a la Tierra
10^{-2}	destello de un flash fotográfico
10^{-3}	tiempo de respuesta de una excitación neuronal, período de ondas sonoras
10^{-6}	período de ondas de radio
10^{-9}	período de microondas
10^{-15}	período de la luz visible
10^{-17}	período de los rayos X

Ángulo sólido es la figura geométrica constituida por todas las semirrectas que tienen un mismo origen, designado como vértice, y que cortan a una curva cerrada (Figura 1.3). Expresa el tamaño aparente, para un observador situado en el vértice, de un objeto cuyo contorno es dicha curva. Su valor —expresado en *estereorradianes*— se obtiene trazando con radio arbitrario r y centro en el vértice V una superficie esférica y aplicando la relación

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

siendo S el área del casquete esférico interceptado por el ángulo sólido.

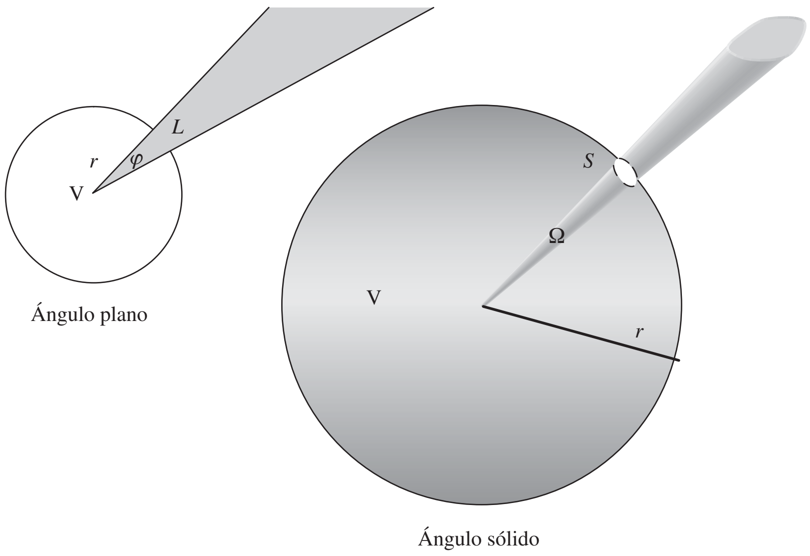


Figura 1.3

El estereorradián es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, delimita sobre la superficie esférica correspondiente un área igual a la de un cuadrado que tiene como lado el radio de la esfera.

Como el área de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido completo alrededor de un punto es 4π sr. El Sol y la Luna se ven desde la Tierra con un ángulo sólido de aproximadamente 6×10^{-5} sr.

De las definiciones de ángulo plano y ángulo sólido es claro que son magnitudes adimensionales, por lo que sus fórmulas dimensionales son

$$[\varphi] = [\Omega] = \mathrm{M^0L^0T^0\theta^0Q^0} = 1$$

Algunas unidades utilizadas pero no incluidas en el Sistema Internacional

Nombre	*Símbolo*	*Valor en unidad SI*
minuto	min	1 min = 60 s
hora	h	1 h = 60 min = 3600 s
día	d	1 d = 24 h = 86 400 s
grado	º	$1^{\circ} = (\pi/180)$ rad
minuto	′	$1' = (1/60)^{\circ} = (\pi/10\,800)$ rad
segundo	″	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000)$ rad
litro	l	1 l = l $dm^3 = 10^{-3}$ m^3
tonelada	t	1 t = 10^3 kg
milla marina		1 milla marina = 1852 m
nudo		1 milla marina por hora = (1852/3600) m/s
angstrom	Å	1 Å = 0,1 nm = 10^{-10} m
área	a	1 a = 10^2 m^2
hectárea	ha	1 ha = 10^4 m^2
bar	bar	1 bar = 0,1 MPa = 10^5 Pa
atmósfera normal	atm	1 atm = 101 325 Pa
gal [a]	Gal	1 Gal = 1 $cm/s^2 = 10^{-2}$ m/s^2
fermi	fermi, fm	1 fm = 10^{-15} m
quilate	q	1 quilate = 200 mg = 2×10^{-4} kg
torr	torr	1 torr = (101 325/760) Pa
kilogramo-fuerza	kgf	1 kgf = 9,80665 N
caloría	cal	1 cal = 4,1868 J
micra	μ	1μ = 1 μm = 10^{-6} m
Unidades CGS con nombres especiales		
ergio	erg	1 erg = 10^{-7} J
dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
poise	P	1 P = 1 dyn·s/cm^2 = 0,1 Pa·s
stokes	St	1 St = 1 $cm^2/s = 10^{-4}$ m^2/s

a. El gal se emplea en geodesia y geofísica para expresar la aceleración debida a la gravedad.

III. MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DECIMALES DE LAS UNIDADES SI

Factor	*Prefijo*	*Símbolo*	*Factor*	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

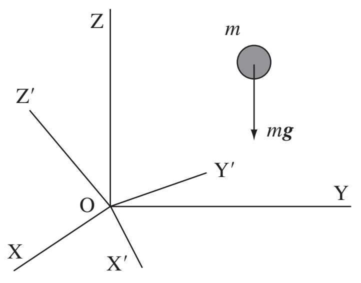


Figura 1.4

c) *Componentes de un vector*
Se puede dar otra descripción de una magnitud vectorial utilizando un referencial S (Figura 1.5). En efecto, utilizando coordenadas cartesianas y siendo $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ los vectores unitarios ortogonales según los ejes X, Y, Z, el vector $\boldsymbol{r}$ con origen en O puede expresarse como

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.13}$$

o, en forma compacta,

$$\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$$

con x, y, z las *componentes cartesianas* del vector $\boldsymbol{r}$ respecto de los ejes X, Y, Z; es decir, x, y, z son las proyecciones de $\boldsymbol{r}$ sobre dichos ejes

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\cos\beta \qquad z = r\cos\gamma \tag{1.14}$$

siendo α, β, γ, los ángulos que forma $\boldsymbol{r}$ con los ejes X, Y, Z, respectivamente. Por tanto,

un vector puede describirse mediante tres números: sus componentes.

Hay que notar que aquí se está hablando de componentes cartesianas, pero igualmente se pueden considerar componentes relativas a otros sistemas de coordenadas.

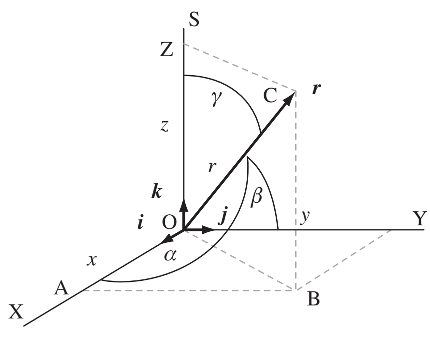


Figura 1.5

d) *Módulo y cosenos directores*
De los triángulos rectángulos OAB y OBC (Figura 1.5) se puede obtener el módulo del vector ***r*** sin más que aplicar el teorema de Pitágoras,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.15}$$

y su dirección y sentido mediante los cosenos directores,

$$\cos\alpha = x/r \qquad \cos\beta = y/r \qquad \cos\gamma = z/r$$

que cumplen la relación, de acuerdo con (1.15),

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

e) *Dependencia con el referencial de las componentes de un vector*
Las tres componentes x, y, z de ***r*** están referidas a los ejes XYZ; si se modifica la orientación de los mismos (Figura 1.6), los ángulos α', β', γ' que el mismo vector ***r*** forma con los nuevos ejes son diferentes, y diferentes las componentes x', y', z' según (1.14). La descripción, por tanto, de una magnitud vectorial mediante tres números —sus componentes— es una descripción referida a un referencial, es decir, hay que especificar éste.

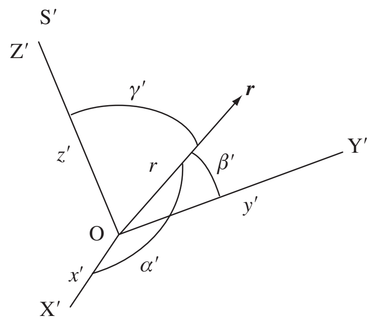


Figura 1.6

f) *Punto de aplicación*
Atendiendo al punto de aplicación, los vectores se clasifican en:

- **fijo** o **ligado**, cuyo punto de aplicación está definido (por ejemplo, el vector velocidad de una partícula está aplicado en la partícula)
- **deslizante**, cuyo punto de aplicación es cualquiera de la recta soporte del vector (la fuerza aplicada a un cuerpo rígido origina el mismo movimiento cualquiera que sea el punto de su línea de acción en el que actúe)
- **libre**, cuyo punto de aplicación es cualquiera del espacio de interés (el vector velocidad de un cuerpo en movimiento de traslación expresa su velocidad —que es común— cualquiera que sea el punto del sólido en el que se aplique)

g) *Vectores polares y axiales*

- Un vector es *polar* cuando su sentido viene determinado por la magnitud que representa, como el vector velocidad de una partícula.
- Un vector es *axial* si su sentido viene definido por convenio. Este es el caso del vector velocidad angular, por ejemplo, al que se le asigna el sentido de avance de un tornillo al moverlo de acuerdo con el giro.

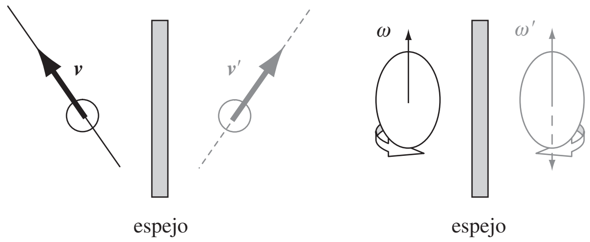


Figura 1.7

La diferencia entre los vectores polar y axial de los ejemplos anteriores se hace evidente si consideramos la imagen en un espejo del movimiento y del vector asignado (Figura 1.7). Mientras que el vector $\boldsymbol{v}'$ (imagen del vector velocidad $\boldsymbol{v}$) describe el movimiento imagen de la partícula, el vector $\boldsymbol{\omega}'$ (imagen del vector velocidad angular de la moneda) no describe el movimiento de rotación imagen (la velocidad angular del movimiento imagen es el vector $-\boldsymbol{\omega}'$).

2. SUMA DE VECTORES

Dados los vectores $\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\boldsymbol{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$, su suma viene dada:

- Gráficamente, mediante la regla del paralelogramo, haciendo coincidir sus orígenes y trazando paralelas a los vectores: la diagonal del paralelogramo desde el origen común es el vector suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (Figura 1.8(a)). O bien, poniendo un vector a continuación del otro; la resultante se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del segundo (Figura 1.8(b)).

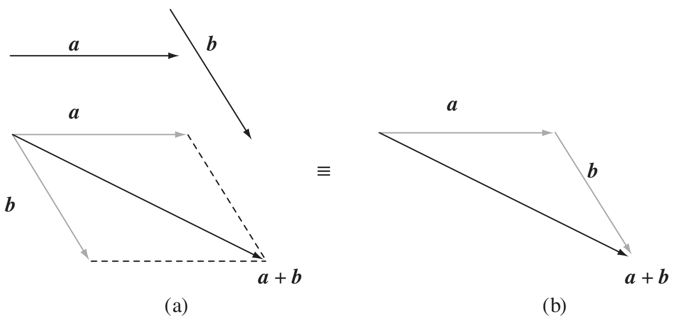


Figura 1.8

- Analíticamente, sumando las componentes según cada eje.

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Se cumple que:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\
&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \\
&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a} \qquad \forall \boldsymbol{a} \\
&\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{c}$ otro vector, $\boldsymbol{0}$ el vector nulo, y $(-\boldsymbol{a})$ el vector opuesto de $\boldsymbol{a}$, de igual módulo y dirección pero de sentido contrario.

3. PRODUCTO DE ESCALARES Y VECTORES

Dados el vector $\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y el escalar m, su producto es

$$m\boldsymbol{a} \equiv (ma_x, ma_y, ma_z)$$

Se cumple que:

$$\begin{aligned}
&(m+n)\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{a} \\
&m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \\
&n(m\boldsymbol{a}) = (nm)\boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

siendo n otro escalar, y $\boldsymbol{b}$ otro vector.

4. PRODUCTO ESCALAR

Dados dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\boldsymbol{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$,

> *su **producto escalar** es el **escalar** definido por el producto de sus módulos y el coseno del menor ángulo que forman.*

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv ab\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \tag{1.16}$$

El producto escalar se indica mediante un punto (•) entre los vectores. Es nulo si los vectores son perpendiculares (ángulo igual a $\pi/2$) y es máximo si son paralelos (ángulo nulo o llano).

a) *Conmutativo y distributivo*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \\
&m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (m\boldsymbol{b}) \\
&\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

b) *Producto escalar de los vectores unitarios cartesianos*
Si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son los vectores unitarios cartesianos —perpendiculares entre sí— sus productos escalares, de acuerdo con (1.16), son

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \qquad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \tag{1.17}$$

c) *Expresión en componentes cartesianas*
La expresión del producto escalar en componentes cartesianas, teniendo en cuenta (1.17) es

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) = a_x b_x \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + a_y b_y \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + a_z b_z \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

es decir, igual a la suma de los productos de componentes iguales,

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \tag{1.18}$$

d) *Módulo*
El producto escalar de un vector por sí mismo es, según (1.18) y (1.15), igual al cuadrado de su módulo.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2 \tag{1.19}$$

e) *Componentes*
Las componentes de un vector, es decir, las proyecciones del vector según las líneas coordenadas, son el producto escalar del vector por los unitarios según dichas líneas. Así, las componentes cartesianas son

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i} = a_x$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{j} = a_y$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k} = a_z$$

f) *Ángulo*
Utilizando (1.16) y (1.18) se puede obtener el ángulo que forman dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ conociendo sus componentes:

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

5. PRODUCTO VECTORIAL

Dados dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\boldsymbol{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$,

*su **producto vectorial** es el **vector c**,*

$$\boxed{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{c}} \tag{1.20}$$

tal que (Figura 1.9),

- *su módulo es*

$$c = ab \operatorname{sen} \varphi \tag{1.21}$$

- *su dirección es perpendicular al plano definido por los vectores* ***a*** *y* ***b***
- *su sentido es el de avance de un sacacorchos al girar* ***a*** *sobre* ***b*** *por el ángulo menor y una vez que se han hecho coincidir los orígenes de* ***a*** *y* ***b***.

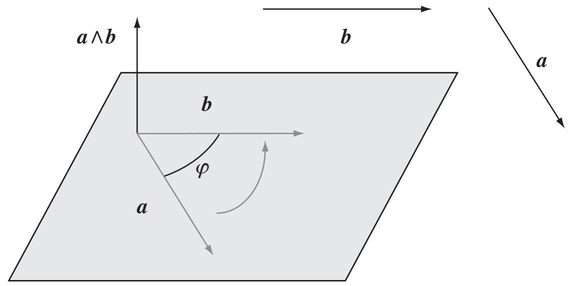


Figura 1.9

El producto vectorial se indica mediante el símbolo ($\wedge$) —o bien un aspa— entre los vectores.

a) *Anticonmutativo y distributivo*
El producto vectorial no es conmutativo,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$$

sino anticonmutativo, a consecuencia de cómo se define el sentido del vector resultante, y es distributivo respecto de la suma de vectores,

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$$

b) *Producto vectorial de los vectores unitarios cartesianos*
Si ***i, j, k*** son los vectores unitarios cartesianos —perpendiculares entre sí— cuya orientación relativa es la indicada en la Figura 1.10(a), de acuerdo con la definición dada sus productos vectoriales son

$$\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

En este caso se dice que los ejes tienen *axialidad directa*; en caso contrario (Figura 1.10(b)), la axialidad se dice inversa ($\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{j}$). Siempre se utilizarán ejes con axialidad directa.

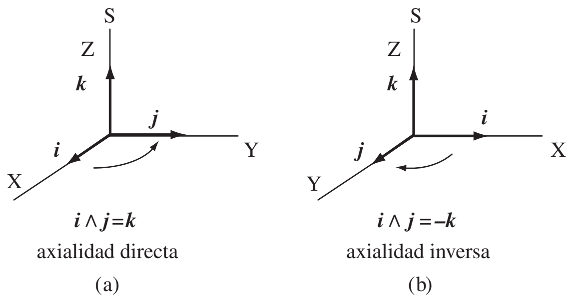


Figura 1.10

c) *Expresión en componentes cartesianas*
En componentes cartesianas, el producto vectorial de dos vectores $\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\boldsymbol{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$ puede expresarse por el determinante

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} \tag{1.22}$$

d) *Vectores paralelos y perpendiculares*
Si dos vectores $\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\boldsymbol{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$ son paralelos, su producto vectorial es nulo por ser nulo su módulo (1.21),

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

En consecuencia, los coeficientes de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ en (1.22) han de ser nulos, resultando que

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

condición que expresa el paralelismo de las direcciones de ambos vectores.

Si los vectores son perpendiculares, el módulo del producto vectorial es máximo (ángulo igual a $\pi/2$).

e) *Vector superficie*
El módulo del vector producto vectorial de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual al área del paralelogramo formado con los dos vectores, pues (Figura 1.11)

$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = ab \operatorname{sen} \varphi = ah = S$$

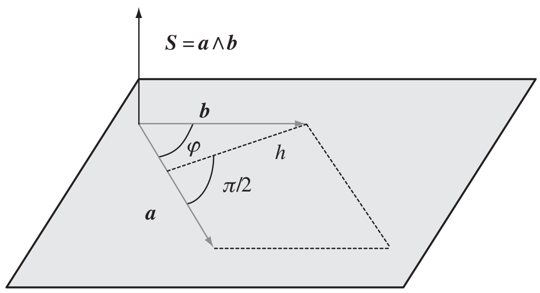


Figura 1.11

Es por ello que la superficie del paralelogramo se puede representar mediante un vector superficie, ***S***, de módulo igual al área y de dirección perpendicular al plano que contiene a la superficie. Tal representación se generaliza a cualquier tipo de superficie; si ésta fuese curva, como la normal cambia de punto a punto, sólo se consideran superficies infinitesimales, y por tanto su vector superficie, *d**S***, también es infinitesimal. Tal vector se puede utilizar para evaluar el ángulo sólido que determina dicha superficie elemental.

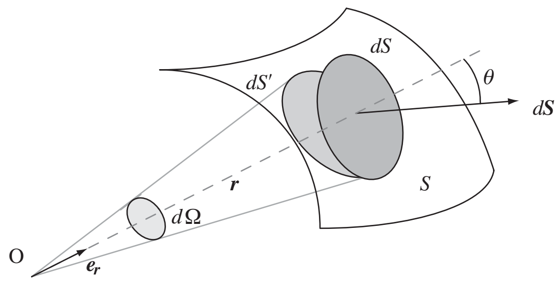


Figura 1.12

El **ángulo sólido** $d\Omega$ correspondiente a la superficie elemental dS viene dado por

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{1.23}$$

con dS' el área de la superficie esférica S intersectada por el cono del ángulo sólido $d\Omega$, área que es la proyección del vector $d\boldsymbol{S}$ en la dirección radial (Figura 1.12).

Se adopta el convenido de definir el sentido positivo del vector $d\boldsymbol{S}$ hacia el exterior, imaginando que la superficie S es parte de una superficie cerrada. Debido a ello, el vector que representa una superficie cerrada es cero al compensarse en el cómputo total todos los $d\boldsymbol{S}$: $\boldsymbol{S} = \int d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$.

f) ***Momento de un vector***

El ***momento M(o) de un vector a respecto de un punto*** *O se define como el producto vectorial del vector de posición* ***r****(o) —del punto de aplicación del vector* ***a*** *respecto del punto O— por dicho vector (Figura 1.13).*

(Para evitar confusiones, lo designaremos, en general, como momento-vector; y momento-fuerza si el vector es una fuerza).

$$\boxed{\boldsymbol{M}(\mathrm{o}) \equiv \boldsymbol{r}(\mathrm{o}) \wedge \boldsymbol{a}} \tag{1.24}$$

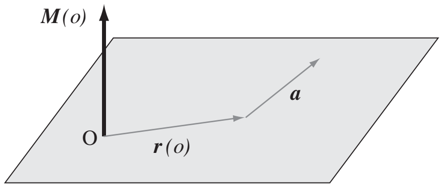


Figura 1.13

g) *Dobles productos*
La demostración de las igualdades de los siguientes productos entre vectores se deja como ejercicio.

- Producto mixto, que no se modifica al realizar una permutación cíclica entre los factores:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \tag{1.25}$$

En componentes cartesianas

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- Obsérvese la desigualdad

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

pues el primer miembro es un vector en la dirección de $\boldsymbol{a}$, y el segundo miembro es un vector en la dirección de $\boldsymbol{c}$.

- Doble producto vectorial

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{1.26}$$

Obsérvese la desigualdad

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$$

pues el primer miembro es un vector contenido en un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$, mientras que el segundo miembro es un vector contenido en un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{c}$.

- Cuadrado del producto vectorial

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^2 = a^2 b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \tag{1.27}$$

6. DERIVADA E INTEGRAL DE UN VECTOR

Si un vector $\boldsymbol{a}$ es función de un escalar s, $\boldsymbol{a}(s)$, la derivada de $\boldsymbol{a}$ respecto de s —es decir, cómo cambia el vector con el cambio del escalar— viene dada por la expresión

$$\frac{d\boldsymbol{a}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(s+\Delta s) - \boldsymbol{a}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta s}$$

siendo $\boldsymbol{a}(s)$ y $\boldsymbol{a}(s + \Delta s)$ el vector $\boldsymbol{a}$ para los valores s y $s + \Delta s$ del escalar, respectivamente. En componentes cartesianas,

$$\frac{d\boldsymbol{a}(s)}{ds} = \frac{da_x(s)}{ds}\boldsymbol{i} + \frac{da_y(s)}{ds}\boldsymbol{j} + \frac{da_z(s)}{ds}\boldsymbol{k}$$

En la mayoría de los casos que consideraremos el escalar es el tiempo.

La operación inversa, la integral de un vector función de un escalar, $\boldsymbol{a}(s)$, y su expresión en componentes cartesianas vienen dada por

$$\int \boldsymbol{a}(s)ds = \int [a_x(s)\boldsymbol{i} + a_y(s)\boldsymbol{j} + a_z(s)\boldsymbol{k}]ds$$

a) *Derivada del producto escalar*
La derivada del producto escalar de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{ds} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$$

b) *Derivada del producto vectorial*
La derivada del producto vectorial de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{ds} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$$

Ejemplo 1.5

El punto de aplicación del vector $\boldsymbol{f} = 2t^3\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}$ es P(3, 1, –2). Calcule:

a) *el momento $\boldsymbol{M}_f(o)$ del vector $\boldsymbol{f}$ respecto del origen de coordenadas O,*
b) *el vector de posición $\boldsymbol{r}_B(A)$ del punto B(1,2,1) respecto del punto A(2, 0, 1),*
c) *la componente del momento $\boldsymbol{M}_f(o)$ según la dirección del vector $\boldsymbol{r}_B(A)$ para t = 1,*

miento de un mismo péndulo en cualquier punto de un paralelo terrestre y a la misma altura es idéntico. Se puede decir, también, que las leyes no se modifican si se cambia el origen del referencial manteniendo su orientación —es decir, todos los puntos del espacio son equivalentes—.

Y sucede que las leyes físicas no cambian tampoco bajo un *giro*; si el nuevo experimento se realiza cambiando la orientación de todo lo que interviene en el mismo, el resultado es coincidente; por ejemplo, el comportamiento de un péndulo al cambiar la orientación del plano de oscilación es idéntico. Esto es, las leyes no se alteran por un cambio de orientación del referencial: todas las direcciones del espacio son equivalentes.

Expresar las ecuaciones físicas mediante vectores y escalares asegura su validez independientemente de cuál sea el origen del referencial elegido y de su orientación. Y aunque la formulación vectorial es muy útil por contener gran cantidad de información de manera concisa y permitir su manipulación matemática de modo sencillo, la aplicación concreta de las relaciones físicas en la obtención de soluciones cuantitativas a los problemas exige escribir dichas ecuaciones utilizando números, es decir, expresándolas mediante las componentes de los vectores. Ahora bien, aunque los escalares y vectores no se alteran al cambiar el origen y la orientación de los ejes, las componentes de los vectores sí cambian en un giro de los ejes, ya que cambian los ángulos que los vectores forman con ellos, mientras que el valor del escalar permanece inalterable. En consecuencia, las ecuaciones físicas deben ser vectorialmente homogéneas, es decir,

> *cada uno de los miembros de una ecuación física debe tener el mismo carácter escalar o vectorial.*[2]

Si una ecuación no fuera homogénea vectorialmente, esto es, si estableciera la igualdad entre un miembro escalar y otro vectorial, un cambio de orientación de los ejes implicaría, al expresarla en componentes, una variación en uno de los miembros pero no en el otro, rompiéndose la igualdad.

El carácter escalar o vectorial de un miembro de una ecuación implica ciertamente el mismo carácter en cada uno de los términos que figuren en dicho miembro.

1. O tensorial, que aquí no se considera.

Capítulo 2

CINEMÁTICA

2.1 Posición 32
2.2 Velocidad..34
2.3 Aceleración..39
2.4 Movimientos con aceleración constante 43
2.5 Movimientos periódico y vibratorio armónico 50
2.6 Movimientos de traslación y de rotación...59

2.1 Posición

*La **mecánica** es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos.*

*La **cinemática** es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos con independencia de las causas que lo originan.*

La cinemática del *punto material* o **partícula** es el estudio del movimiento de un cuerpo cuyo tamaño y forma no tienen importancia en la resolución de un problema mecánico determinado.

Un *sistema de referencia* o **referencial**, S, es un cuerpo respecto del cual interesa conocer la posición en cada instante de una cierta partícula, utilizando para ello un determinado sistema de coordenadas.

La determinación vectorial de la localización de la partícula P en cada instante se realiza mediante el ***vector de posición r***, con origen en algún punto, O, que se toma como origen de coordenadas, siendo P el otro extremo del vector (Figura 2.1).

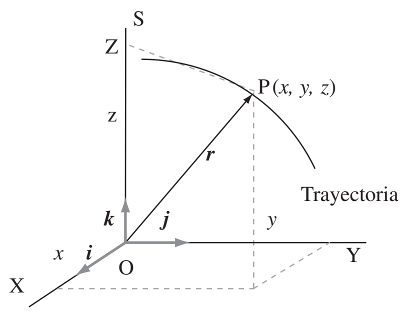


Figura 2.1

a) *Coordenadas cartesianas*
La expresión del vector de posición en componentes respecto de los ejes cartesianos XYZ con origen en O —componentes que coinciden con las coordenadas cartesianas de P en el mismo sistema— es

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (2.1)$$

siendo ***i, j, k*** la terna de vectores unitarios según tales ejes.

b) *Coordenadas polares*
Si la partícula se encuentra siempre en un mismo plano, en muchos casos es útil utilizar las coordenadas polares r (con origen en el de coordenadas) y θ (con origen en el eje polar). Su relación con las coordenadas cartesianas es (Figura 2.2):

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (2.2)$$

d) *Trayectoria*
Trayectoria es la línea que describe la partícula en su movimiento al ir ocupando distintas posiciones en el transcurso del tiempo (Figura 2.1). El tipo de trayectoria permite considerar dos tipos de movimiento:

- movimiento *rectilíneo*, cuando la trayectoria es recta;
- movimiento *curvilíneo*, cuando la trayectoria es curva; un caso particular es el movimiento *circular*, en el que la trayectoria es una circunferencia.

Las ecuaciones anteriores —de dependencia temporal de las coordenadas— son las de la trayectoria en forma paramétrica, con el tiempo como parámetro; eliminando éste —si ello es posible— se obtiene la ecuación de la trayectoria como una relación entre las coordenadas:

$$z = z(x, y) \qquad \text{o} \qquad r = r(\theta)$$

2.2 Velocidad

Si una partícula se mueve, su posición cambia. ¿Cómo se mide ese cambio de posición en cada instante? La respuesta viene dada por el vector **velocidad** instantánea ($\boldsymbol{v}$)

$$\boxed{\boldsymbol{v} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}} \qquad \{(\text{S.I.: m/s}); [v] = \text{LT}^{-1}\} \tag{2.4}$$

que expresa el **cambio de posición** de la partícula con el tiempo. A continuación del recuadro anterior se ha indicado, también, la unidad de velocidad en el Sistema Internacional y la fórmula dimensional de dicha magnitud.

a) La velocidad expresa el cambio temporal del *vector* de posición, y tal vector puede variar tanto en módulo como en dirección y sentido.

b) *Componente intrínseca de la velocidad*
Las *componentes intrínsecas* de un vector son sus componentes *referidas a la trayectoria*, es decir, las proyecciones de un vector según los vectores unitarios definidos respecto de la trayectoria en cada punto de la misma; ya veremos cómo se definen.

Sea $\boldsymbol{r}$ el vector de posición de una partícula P respecto de un origen cualquiera O en el instante t, y $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ su vector de posición en el instante $t + \Delta t$ (Figura 2.3); su velocidad es

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

Por otra parte, la localización —en cada instante— de una partícula móvil sobre su propia trayectoria sólo necesita de una coordenada: la distancia s medida sobre tal curva, de ahí su nombre de coordenada intrínseca. Pues bien, utilizando tal coordenada se puede expresar la velocidad como

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

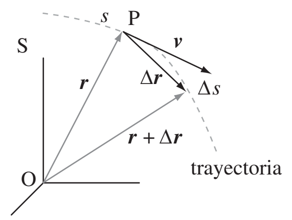


Figura 2.3

Ahora bien,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}$$

y en el límite, cuando $\Delta s \to 0$, la dirección de $\Delta\boldsymbol{r}$ es la de la tangente a la trayectoria en el punto P y el cociente $|\Delta\boldsymbol{r}|/\Delta s = 1$ (siendo $|\Delta\boldsymbol{r}|$ el módulo de $\Delta\boldsymbol{r}$); en consecuencia, tomando el vector unitario $\boldsymbol{u}_t$ tangente a la trayectoria en el punto en que se encuentra la partícula, y con sentido el del movimiento, resulta

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{u}_t$$

y

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{u}_t = v\boldsymbol{u}_t} \qquad (2.5)$$

expresando así que

la velocidad es un vector tangente a la trayectoria en cada punto.

c) *Componentes radial y transversal de la velocidad*

Si el movimiento de la partícula se realiza en un plano y se utilizan coordenadas polares, no hay que confundir la componente intrínseca de la velocidad con sus componentes radial y transversal, que son las proyecciones de $\boldsymbol{v}$ según los vectores unitarios $\boldsymbol{e}_r$ y $\boldsymbol{e}_\theta$. En la Figura 2.4 se ilustra un caso de trayectoria circular en el que el origen de coordenadas, O, no se ha tomado en el centro de curvatura de la circunferencia, C. Como $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}_t$ sus componentes radial y transversal son, respectivamente,

$$v_r = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r = v\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{e}_r$$
$$v_\theta = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\theta = v\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{e}_\theta$$

y como la longitud del arco de trayectoria (*ds*) que determinan las dos posiciones es igual al producto del ángulo $d\phi$ por el radio, esto es,

$$ds = \rho d\phi$$

resulta

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\phi}{dt}$$

La derivada temporal $d\phi/dt$, que expresa el cambio de dirección de la velocidad en el movimiento de la partícula —y el cambio de dirección del vector de posición $\boldsymbol{\rho}$ con origen en el centro de curvatura—, se denomina **velocidad angular**, ω,

$$\boxed{\omega \equiv \frac{d\phi}{dt} \equiv \dot{\phi}} \qquad \{(\text{S.I.: rad/s}); [\omega] = \text{T}^{-1}\} \qquad (2.6)$$

de modo que

$$v = \omega\rho \qquad (2.7)$$

siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria en P.

e) *Valores de velocidad y velocidad angular*

Velocidad (m/s)	
10^8	la luz en el vacío ($2{,}99792458 \times 10^8$)
10^5	traslación del Sistema Solar alrededor del centro de nuestra galaxia
10^4	traslación de la Tierra en su órbita ($2{,}98 \times 10^4$); velocidad de escape en la superficie terrestre
10^3	satélite geoestacionario; sonido en el agua ($1{,}26 \times 10^3$), bala de fusil
10^2	sonido en el aire ($3{,}43 \times 10^2$); vientos huracanados, avión
10^1	caballo al galope; velocistas de 100 m lisos
10^0	persona andando
10^{-1}	*kilómetro por hora* ($2{,}778 \times 10^{-1}$)
10^{-2}	caracol, perezoso (el mamífero más lento)
Velocidad angular (rad/s)	
10^3	lavadora
10^1	rotación promedio de un pulsar
10^{-4}	rotación terrestre ($7{,}29 \times 10^{-5}$)
10^{-7}	orbital terrestre ($1{,}99 \times 10^{-7}$)

f) *Vector velocidad angular*

A la *velocidad angular* se le puede dar *carácter vectorial*, *con dirección la de la recta perpendicular al plano en que está definido el ángulo variable y que pasa por su vértice, y sentido el de avance del tornillo girado según el crecimiento del ángulo.*

Definiendo un vector unitario $\boldsymbol{b}$ —denominado *vector* **binormal**— con tal dirección y sentido (Figura 2.6), el vector velocidad angular viene dado por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{b} \tag{2.8}$$

y la relación (2.7) puede expresarse en forma vectorial como

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}} \tag{2.9}$$

O bien, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{R}$, pues $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{OC} + \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ dado que $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OC} = \boldsymbol{0}$ al ser ambos vectores paralelos.

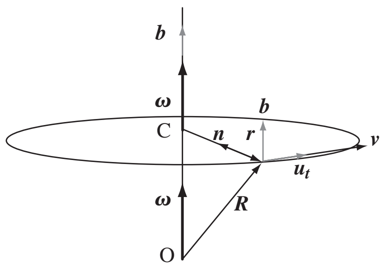


Figura 2.6

g) *Triedro intrínseco*

Definidos los vectores unitarios $\boldsymbol{u}_t$ y $\boldsymbol{b}$ en el punto de la trayectoria en que se encuentra la partícula (Figura 2.6), se completa la terna de vectores unitarios intrínsecos con el vector normal $\boldsymbol{n}$, tal que

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{u}_t \tag{2.10}$$

Así, $\boldsymbol{n}$ es un vector perpendicular a la trayectoria y dirigido hacia el centro de curvatura (Figura 2.6 y 2.7).

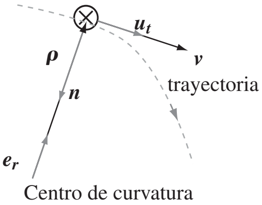


Figura 2.7

h) Si el vector de posición se toma respecto del centro de curvatura (Figura 2.7), tal vector y su vector unitario $\boldsymbol{e}_r$ ($\rho = \rho \boldsymbol{e}_r$) tienen la misma dirección que el vector normal $\boldsymbol{n}$, de modo que $\boldsymbol{e}_r$ es perpendicular al vector unitario tangente $\mathbf{u}_t$, y el cambio temporal de orientación de éste —que viene dado por $\boldsymbol{\omega}$, Ecuación (2.6)— coincide con el cambio temporal de orientación de $\boldsymbol{e}_r$; por tanto, según (2.9), considerando un vector de posición unitario $\boldsymbol{e}_r$ se tiene que

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \omega \wedge \boldsymbol{e}_r$$

y, en general,

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = \omega \wedge \boldsymbol{e}} \qquad (2.11)$$

que expresa la

variación temporal de un vector unitario que cambia de orientación con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

2.3 Aceleración

¿Y cómo se mide el cambio de velocidad en cada instante? Mediante el **vector aceleración** instantánea ($\boldsymbol{a}$)

$$\boxed{\boldsymbol{a} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{v}} \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}} \qquad \{(\text{S.I.: m/s}^2);\ [a] = \text{LT}^{-2}\} \qquad (2.12)$$

que expresa el **cambio de la velocidad** de la partícula con el tiempo.

a) La aceleración da cuenta del cambio temporal del *vector* velocidad, por lo que será no nula siempre que exista cambio temporal del módulo de la velocidad o de su dirección y sentido.

b) ***Componentes intrínsecas de la aceleración***
Derivando la Ecuación (2.5) de la velocidad, resulta

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}_t + v\frac{d\boldsymbol{u}_t}{dt}$$

El primer término expresa la variación temporal del módulo de la velocidad y tiene la dirección tangencial —indicada por $\boldsymbol{u}_t$—; el segundo término expresa la variación temporal de la dirección de la velocidad. ¿Cuál es la dirección de dicha componente de la aceleración? Hay que tener en cuenta que la derivada de un vector de módulo constante es otro vector perpendicular al primero; $\boldsymbol{u}_t$ es un vector de módulo constante (la unidad) por lo que el cuadrado de su módulo también es constante,

$$\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}_t = 1$$

y derivando,

$$2\boldsymbol{u}_t \cdot \frac{d\boldsymbol{u}_t}{dt} = 0$$

por lo que, al ser su producto escalar nulo, $\boldsymbol{u}_t$ y su vector derivada $d\boldsymbol{u}_t/dt$ son perpendiculares; en consecuencia, $v(d\boldsymbol{u}_t/dt)$ es un vector normal a la trayectoria. Resulta, pues, que la aceleración se puede expresar como suma vectorial de dos componentes,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n \tag{2.13}$$

siendo

$$\boxed{\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}_t} \tag{2.14}$$

*la **aceleración tangencial**, que expresa la variación temporal del módulo de la velocidad,*

y

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{d\boldsymbol{u}_t}{dt} \tag{2.15}$$

*la **aceleración normal**, que expresa la variación temporal de la dirección de la velocidad.*

c) *Aceleración en el movimiento curvilíneo y rectilíneo*

De acuerdo con lo dicho, si una partícula se mueve según una trayectoria curvilínea cualquiera, entonces está acelerada, pues al menos su aceleración normal no es nula porque cambia la dirección de la velocidad en el movimiento; la aceleración tangencial podrá ser nula, si el módulo de la velocidad no cambia con el transcurso del tiempo, o no nula, si dicho módulo cambia.

Por el contrario, si la trayectoria es rectilínea, la aceleración normal es nula, mientras que la aceleración tangencial puede serlo o no.

d) ***Aceleración centrípeta y velocidad angular***

Teniendo en cuenta (2.11), (2.8) y (2.10),

$$\frac{d\boldsymbol{u}_t}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u}_t = \omega\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{u}_t = \omega\boldsymbol{n} \tag{2.16}$$

y la aceleración normal (2.15) puede expresarse, considerando también la relación (2.7), como

$$\boxed{\boldsymbol{a}_n = v\frac{d\boldsymbol{u}_t}{dt} = v\omega\boldsymbol{n} = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \omega^2\rho\boldsymbol{n}} \tag{2.17}$$

donde queda explícito que la aceleración normal está dirigida hacia el centro de curvatura; de ahí que también reciba el nombre de **aceleración centrípeta**.

e) *Otras expresiones*
El producto escalar de $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}_t$ y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$ es

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = va_t$$

de modo que

$$a_t = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}}{v} \tag{2.18}$$

Y su producto vectorial

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_t & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{b} \\ v & 0 & 0 \\ a_t & a_n & 0 \end{vmatrix} = va_n\boldsymbol{b}$$

de donde

$$a_n = \frac{|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a}|}{v} \tag{2.19}$$

Además, como

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{2.20}$$

sustituyendo en (2.19) se puede obtener el radio de curvatura mediante la expresión

$$\rho = \frac{v^3}{|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a}|} \tag{2.21}$$

Ejemplo 2.1

Una partícula se mueve en un plano de modo que sus coordenadas cartesianas varían en el tiempo en la forma $x = \rho(1 + \cos \omega t)$, $y = \rho \operatorname{sen} \omega t$, siendo ρ y ω constantes. Determine: a) la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares; b) su velocidad y aceleración; c) las componentes intrínsecas de la aceleración.

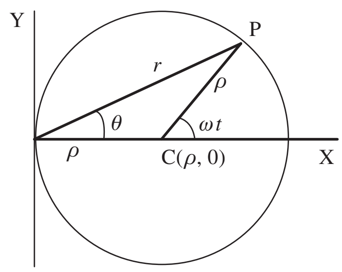
a) Tratemos de eliminar el tiempo entre x e y; para ello escribamos su dependencia temporal en la forma

$$(x - \rho) = \rho \cos \omega t \qquad\qquad y = \rho \operatorname{sen} \omega t$$

Elevando al cuadrado y sumando, se obtiene

$$(x - \rho)^2 + y^2 = \rho^2$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio ρ y centro en el eje X, situado a distancia ρ del origen.



La ecuación de la trayectoria en coordenadas polares se obtiene sustituyendo las coordenadas cartesianas por aquellas en la ecuación obtenida, de acuerdo con las relaciones (2.2); así

$$(r\cos\theta - \rho)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta = \rho^2$$

resultando,

$$r = 2\rho\cos\theta$$

b) El vector de posición viene dado en cartesianas por

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \rho[(1+\cos\omega t)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{j}]$$

y la velocidad,

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \rho\omega[-\operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{i} + \cos\omega t\boldsymbol{j}]$$

con módulo

$$v = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \rho\omega$$

La aceleración es

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\rho\omega^2[\cos\omega t\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{j}]$$

de módulo

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \rho\omega^2$$

c) La componente tangencial de la aceleración, utilizando la Ecuación (2.18), viene dada por

$$a_t = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{v} = \frac{1}{\rho\omega}\rho\omega[-\operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{i} + \cos\omega t\boldsymbol{j}]\cdot(-\rho\omega^2)[\cos\omega t\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\omega t\boldsymbol{j}] = 0$$

resultado que también puede obtenerse de su definición

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\rho\omega = 0$$

La aceleración sólo tiene, pues, componente normal. Al mismo resultado se llega utilizando (2.19), $a_n = \dfrac{|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a}|}{v}$. Como

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a} = -\rho^2\omega^3 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\operatorname{sen}\omega t & \cos\omega t & 0 \\ \cos\omega t & \operatorname{sen}\omega t & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\omega^3 \boldsymbol{k}$$

resulta

$$a_n = \frac{|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a}|}{v} = \rho\omega^2$$

2.4 Movimientos con aceleración constante

I. CASO GENERAL

A partir de la aceleración, Ecuación (2.12), el cambio de velocidad entre el instante inicial ($t = 0$) y cualquier otro (t) viene dado por

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} d\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\, dt$$

A) Aceleración nula

*Si la aceleración es nula, no hay cambio en la velocidad, **v** = **v**$_0$, y el **movimiento** se dice **rectilíneo y uniforme**.*

B) Aceleración constante

*Si la aceleración es un vector constante (**a** = **cte**) —no cambia con el tiempo durante el movimiento— el **movimiento** se denomina **uniformemente acelerado**.*

En este caso, integrando la expresión anterior, resulta que

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\int_0^t dt = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t} \qquad (2.22)$$

relación que permite determinar la velocidad en cualquier instante del movimiento conociendo su aceleración *constante* y velocidad inicial.

El cambio en el vector de posición se obtiene a partir de la definición de velocidad, Ecuación (2.4), de modo que

$$\int_{r_o}^{r} d\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}dt = \int_0^t (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t)dt$$

esto es,

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2} \tag{2.23}$$

ecuación que proporciona el vector de posición en cualquier instante del movimiento conociendo su aceleración *constante*, y velocidad y posición iniciales.

También, eliminando el tiempo entre (2.22) y (2.23) resulta,

$$\boxed{\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}_0^2 = 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}$$

II. MOVIMIENTO BAJO LA ACCIÓN DE LA GRAVEDAD

Analicemos el movimiento de un proyectil lanzado con una cierta velocidad inicial, $\boldsymbol{v}_0$, que forma un ángulo θ con el plano horizontal; durante su movimiento se encuentra sometido a la acción de una aceleración constante, la de la gravedad $\boldsymbol{g}$, vertical y dirigida hacia el suelo.

Tomaremos como plano XY el definido por los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{g}$, con el eje Y vertical y sentido positivo ascendente, y el origen del referencial en la posición inicial ($t = 0$) (Figura 2.8).

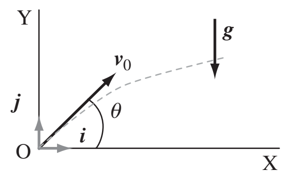


Figura 2.8

Tenemos, pues,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$$

y

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j} = v_0 \cos\theta \boldsymbol{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j}$$

Por tanto, de $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ se tiene que

$$\int_{v_o}^{v} d\boldsymbol{v} = (-g\int_0^t dt)\boldsymbol{j} = -gt\boldsymbol{j}$$

y

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{j} = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j} - gt\boldsymbol{j}$$

b) *Tiempo*
El tiempo requerido para que el proyectil alcance la máxima altura h, en A, es el que transcurre hasta que se anula el movimiento vertical ascendente, es decir, cuando $v_y = 0$. Utilizando (2.24)

$$v_y = v_{0y} - gt_h = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt_h = 0$$

de donde

$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

c) *Máxima altura*
La maxima altura, h, se obtiene sustituyendo el tiempo de la expresión anterior en la Ecuación (2.26),

$$h = v_{0y}t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

d) *Tiempo de vuelo*
Tiempo de vuelo, t_v, es el tiempo necesario para que el proyectil retorne al nivel del suelo, en B. Se puede obtener haciendo $y = 0$ en (2.26),

$$y = 0 = v_{0y}t_v - \frac{1}{2}gt_v^2 = v_0 t_v \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}gt_v^2$$

de modo que

$$t_v = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

que es el doble del tiempo requerido para alcanzar la máxima altura, t_h.

e) *Alcance*
El alcance es la distancia horizontal cubierta por el proyectil. Se obtiene sustituyendo el tiempo de vuelo en la Ecuación (2.25) —o bien haciendo $y = 0$ en la ecuación de la trayectoria—.

$$x_a = v_{0x}t_v = v_0 t_v \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta$$

El alcance máximo se obtiene para un ángulo de lanzamiento $\theta = 45°$; para distancias inferiores, un mismo alcance puede conseguirse con dos ángulos de tiro complementarios ($\theta_1 + \theta_2 = 90°$), por lo que uno es mayor y otro menor de 45° (Figura 2.10).